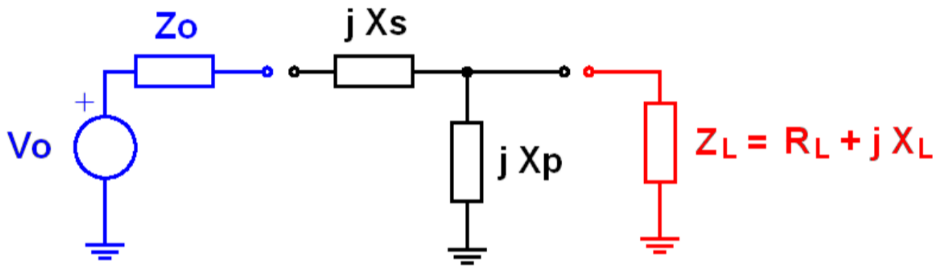
3 Casamento de Impedâncias

Aula 03 - Capítulo 3: slides 1 a 13

3.1 Exercício Resolvido

Encontre os as expressões para X_S e X_P da seção de transformação de impedâncias abaixo em função de R_L, X_L e Z_o para transformar a impedância de carga $Z_L = R_L + j\ X_L$ numa impedância puramente real igual a Z_o.



- Passo 1: Igualar a impedância da fonte à impedância resultante da seção de transformação de impedância com a carga.

$$Z_o = j\,X_S + \frac{j\,X_P.Z_L}{j\,X_P + Z_L}$$

- Passo 2: Subtituir $Z_L = R_L + j\ X_L$.

$$Z_o = j\,X_S + \frac{j\,X_P.\,(R_L + jX_L)}{j\,X_P + R_L + jX_L}$$

- Passo 3: Separar o resultado em partes real e imaginária.

  Inicialmente separa-se o numerador e o denominador da fração em partes real e imaginária lembrando que $j.j = -1$

$$Z_o = j\,X_S + \frac{-X_P.X_L + jX_P.R_L}{R_L + j\ (X_P + X_L)}$$

  e multiplica-se pelo complexo conjugado do denominador conforme

$$\begin{aligned}
Z_o &= j\,X_S + \frac{-X_P.X_L + jX_P.R_L}{R_L + j\ (X_P + X_L)}.\frac{R_L - j\ (X_P + X_L)}{R_L - j\ (X_P + X_L)} \\
Z_o &= j\,X_S + j\frac{X_P.R_L^2 + X_P^2.X_L + X_P.X_L^2}{R_L^2 - (X_P + X_L)^2} + \frac{-X_P.X_LR_L + X_P^2.R_L + X_P.X_LR_L}{R_L^2 - (X_P + X_L)^2} \\
Z_o &= j\left[X_S + \frac{X_P.R_L^2 + X_P^2.X_L + X_P.X_L^2}{R_L^2 - (X_P + X_L)^2}\right] + \frac{X_P^2.R_L}{R_L^2 - (X_P + X_L)^2}
\end{aligned}$$

- Passo 4: Obter duas equaçãoes ao igualar as partes reais e imagninárias separadamente.

$$\begin{aligned}
Z_o &= \frac{X_P^2.R_L}{R_L^2 - (X_P + X_L)^2} \\
0 &= X_S + \frac{X_P.R_L^2 + X_P^2.X_L + X_P.X_L^2}{R_L^2 - (X_P + X_L)^2}
\end{aligned}$$

- Passo 5: Resolver o sistema de duas equações com as duas incógnitas.

  Note que na primeira equação há somente a incógnita X_P, logo recai-se na equação do segundo grau

$$\begin{aligned} Z_o.R_L^2 - Z_o.X_P^2 - 2Z_o.X_L.X_P - Z_o.X_L^2 &= X_P^2.R_L \\ (Z_o + R_L).X_P^2 + 2Z_o.X_L.X_P - Z_o.\left(R_L^2 - X_L^2\right) &= 0 \end{aligned}$$

  cujas soluções são

$$\begin{aligned} X_P &= \frac{-2Z_o.X_L \pm \sqrt{(2Z_o.X_L)^2 + 4\,(Z_o + R_L)\,Z_o.\,(R_L^2 - X_L^2)}}{2\,(Z_o + R_L)} \\ X_P &= -\frac{Z_o.X_L}{Z_o + R_L} \pm \sqrt{\left(\frac{Z_o.X_L}{Z_o + R_L}\right)^2 + \frac{Z_o.\,(R_L^2 - X_L^2)}{Z_o + R_L}} \end{aligned}$$

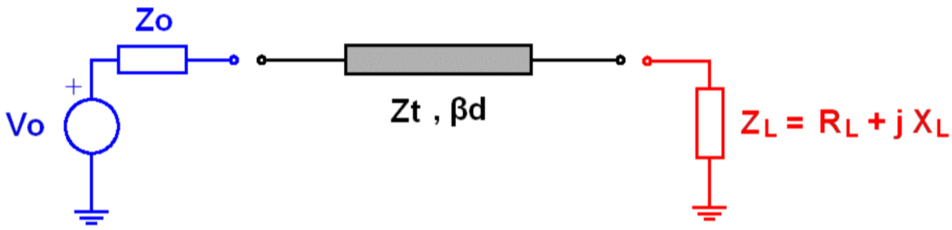
  e, uma vez obtido o valor numérico de X_P, obtem-se o valor numérico de X_S por

$$X_S = \frac{X_P.R_L^2 + X_P^2.X_L + X_P.X_L^2}{(X_P + X_L)^2 - R_L^2}$$

  ▷ Complementação: Note que há duas soluções possíveis, mas se $R_L < |X_L|$ pode não haver nenhuma solução. Nesse caso haverá solução invertendo a seção de transformação de impedâncias.

3.2 Exercício Proposto

Encontre os as expressões para Z_t e βd da seção de transformação de impedâncias abaixo em função de R_L, X_L e Z_o para transformar a impedância de carga $Z_L = R_L + j\ X_L$ numa impedância puramente real igual a Z_o.



▷ Dica: use a expressão da impedância de entrada de um trecho de linha de transmissão terminada (cap2/sld10), substituindo a impedância característica da linha por Z_t e siga os passos do exercício resolvido.

▷ **Resposta:**

$$\begin{aligned} Z_t &= \sqrt{Z_o\left(R_L - \frac{X_L^2}{Z_o - R_L}\right)} \\ \beta d &= \arctan\left(\frac{Z_o - R_L}{Z_o X_L} Z_t\right) \end{aligned}$$