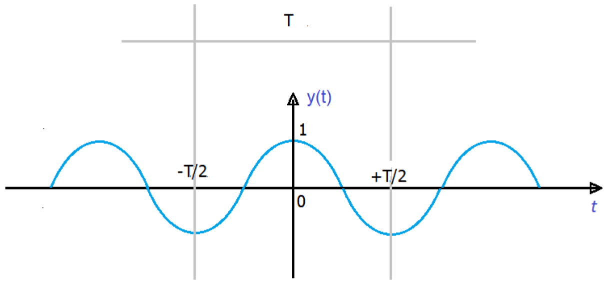
2 Análise de Fourier no Tempo Contínuo

Aula 07 - Capítulo 2: páginas 20 a 22

2.9 Exercício Resolvido

Calcule as transformadas diretas de Fourier $Y(f)$ do seguintes sinais no domínio do tempo:

a) $y(t) = \cos(2\pi t/T)$



- Passo 1: Fórmula da transformada direta de Fourier para sinais periódicos (cap2/pag21).

$$Y(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \, \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) \quad \text{com} \quad C_m = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} y(t).e^{-j2\pi mt/T} dt$$

- Passo 2: Encontrar o período T e substituir no resultado do passo 1.

  Relembrando o que já voi visto antes, o sinal $\cos(t)$ tem período 2π e se for escalonado por $k = T/2\pi$ passa a ser $\cos(t/k) = \cos(2\pi t/T)$ com período $T = k.2\pi = T$, conforme indicação no gráfico.

  Então continua sendo

$$Y(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \, \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) \quad \text{com} \quad C_m = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \cos(2\pi t/T).e^{-j2\pi mt/T} dt$$

- Passo 3: Cálculo do coeficiente C_m

$$C_m = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \cos(2\pi t/T).e^{-j2\pi mt/T} dt$$

Usando as relações

$$\cos(kt) = \frac{e^{jkt} + e^{-jkt}}{2} \quad \text{e} \quad \int e^{kt} dt = \frac{e^{kt}}{k}$$

vem

$$C_m = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \frac{e^{j2\pi t/T} + e^{-j2\pi t/T}}{2}.e^{-j2\pi mt/T} dt = \frac{1}{2}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j2\pi(m-1)t/T} dt + \frac{1}{2}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j2\pi(m+1)t/T} dt$$

$$C_m = \frac{1}{2T}\left[\frac{e^{-j2\pi(m-1)t/T}}{-j2\pi(m-1)/T}\right]_{-T/2}^{+T/2} + \frac{1}{2T}\left[\frac{e^{-j2\pi(m-1)t/T}}{-j2\pi(m-1)/T}\right]_{-T/2}^{+T/2}$$

$$C_m = \frac{1}{2}\frac{e^{-j\pi(m-1)} - e^{-j\pi(m-1)}}{-j2\pi(m-1)} + \frac{1}{2}\frac{e^{-j\pi(m+1)} - e^{-j\pi(m+1)}}{-j2\pi(m+1)}$$

e usando

$$\sin(kt) = \frac{e^{jkt} - e^{-jkt}}{j2} = \frac{e^{-jkt} - e^{jkt}}{-j2}$$

obtém-se

$$C_m = \frac{1}{2}\frac{\sin\left[\pi(m-1)\right]}{\pi(m-1)} + \frac{1}{2}\frac{\sin\left[\pi(m+1)\right]}{\pi(m+1)}$$

Atentando para o fato de que

$$\sin(\pm m\pi) = 0 \quad \text{e que} \quad \lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t} = 1$$

tem-se

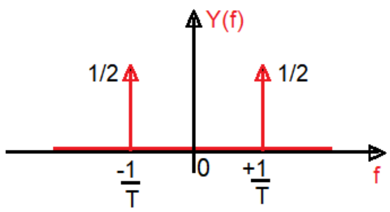
$$C_m = \begin{cases} 1/2 & , \quad m = \pm 1 \\ 0 & , \quad m \neq \pm 1 \end{cases}$$

- Passo 4: Substituir o resultado do passo 3 na expressão do passo 2.

$$Y(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m\,\delta\left(f - \frac{m}{T}\right) = \ldots + 0 + \underbrace{\frac{1}{2}\delta\left(f + \frac{1}{T}\right)}_{m=-1} + 0 + \underbrace{\frac{1}{2}\delta\left(f - \frac{1}{T}\right)}_{m=+1} + 0 + \ldots$$

Finalmente

$$Y(f) = \frac{1}{2}\delta\left(f + \frac{1}{T}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f - \frac{1}{T}\right)$$

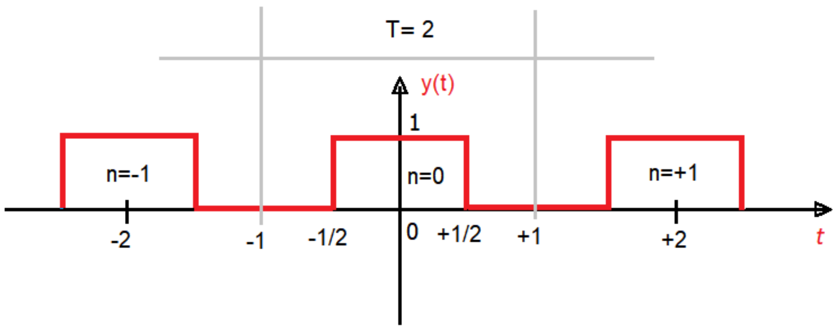


▷ Complementação: Note a situação no limite em que $T \to \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{T\to\infty} y(t) &= \lim_{T\to\infty} \cos(2\pi t/T) = \cos(0) = 1 \\ \lim_{T\to\infty} Y(f) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2}\delta\left(f + \frac{1}{T}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f - \frac{1}{T}\right) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2}\delta(f) = \delta(f) \end{aligned}$$

A transformada de Fourier de uma constante é um impulso em $f = 0$, cuja amplitude tem o valor da constante (igual a 1 nesse caso), o que faz sentido já que a constante não tem variação no tempo.

b) $y(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} r(t - 2n)$



- Passo 1: Fórmula da transformada direta de Fourier para sinais periódicos.

  Nesse exercício será usado o resultado da transformada de Fourier de um período, já calculado no exercício resolvido da aula 08.

  Fazendo $n = 0$ no somatório obtem-se a expressão para um período

$$y_T(t) = r(t)$$

  cuja transformada de Fourier é

$$Y_T(f) = R(f) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$$

  e para o sinal periódico com todos os termos do somatório tem-se (cap2/pag21)

$$Y(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} Y_T\left(\frac{m}{T}\right).\delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

- Passo 2: Encontrar o período T e substituir no resultado do passo 1.

  Pela observação do gráfico, $T = 2$, logo

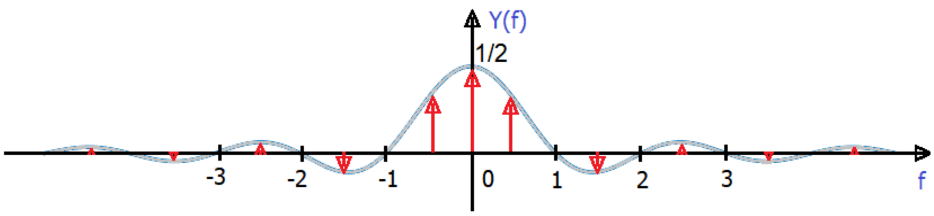
$$Y(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} Y_T\left(\frac{m}{2}\right).\delta\left(f - \frac{m}{2}\right)$$

  e substiuindo a função $Y_T(f)$ com $f = m/2$ vem

$$Y(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{\sin(\pi m/2)}{\pi m/2}.\delta\left(f - \frac{m}{2}\right)$$

  Finalmente

$$Y(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi m/2)}{\pi m}.\delta\left(f - \frac{m}{2}\right)$$



▷ Complementação: Também é possível resover o mesmo exercício usando os coeficientes C_m da série exponencial de Fourier.

2.10 Exercício Proposto

Calcule a transformada direta de Fourier $Y(f)$ do sinal $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n)$.