



Teoria da Relatividade

Introdução

Por mais de 200 anos...

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Até que em 1905 Einstein...

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Para aqueles que desejam somente receber o mínimo necessário para poder resolver problemas isto é todo o que precisam...

...evidentemente o fator de correção da massa para baixas velocidades é insignificante...mesmo a 10 km/s ele é da ordem de 1 parte em 2-3 bilhões ... impossível de observar ...

...então como sabemos que de fato é verdadeira?

A verificação se faz com partículas que se movimentam próximas à velocidade da luz.

De fato há duas teorias da relatividade: a **especial ou restrita e a geral**, vamos estudar inicialmente a primeira que lida com sistemas inerciais de referência (a segunda incorpora a gravidade e portanto a aceleração).

Relatividade Restrita: Postulados

Newton postulou que **“as leis da física são as mesmas para todos os observadores em sistemas de referencia inerciais”**

Não é possível determinar a velocidade absoluta do sistema!

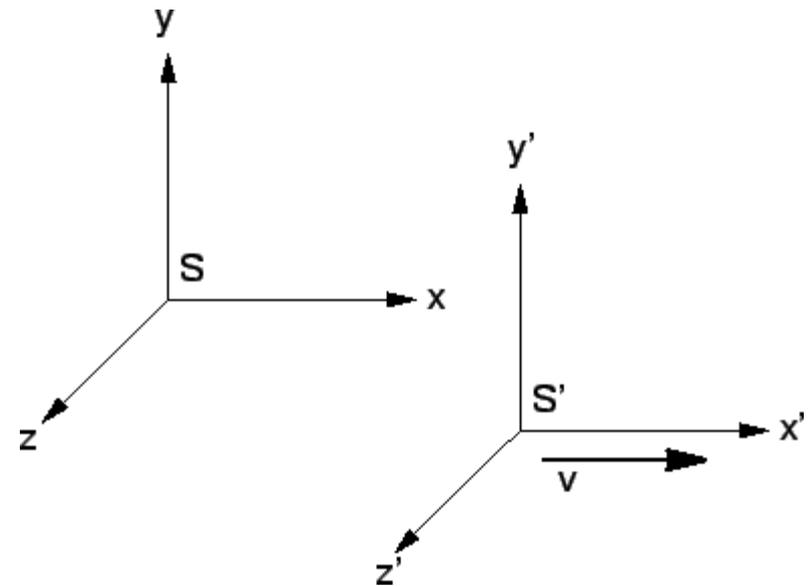
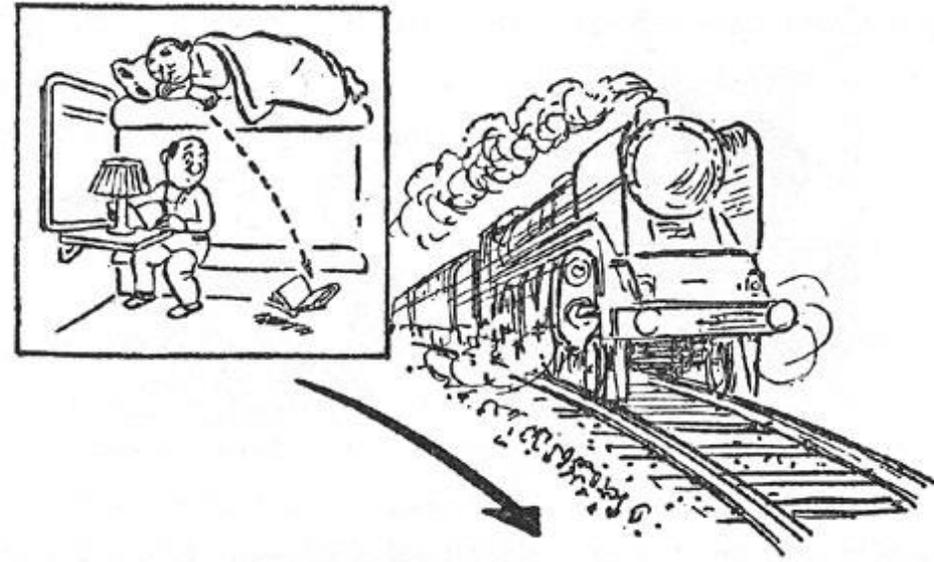
Será que é verdade? Vejamos se as Leis de Newton são as mesmas: Imagine um objeto se movendo a velocidade constante v . Após um tempo t a relação de coordenadas será:

$$x = x' + vt$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = t'$$



Relatividade Restrita: Postulados

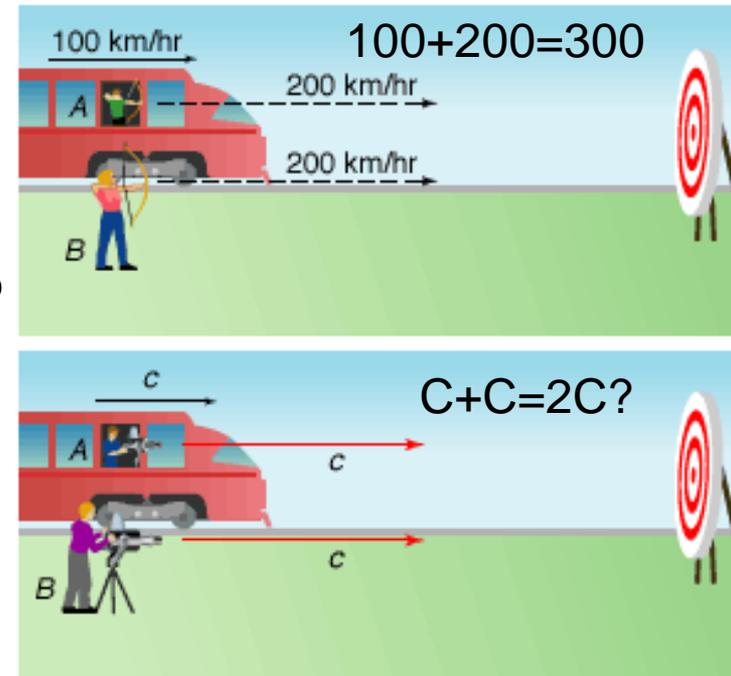
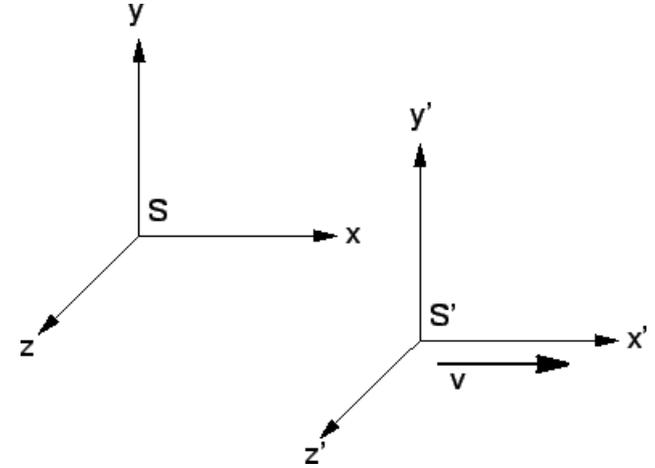
Aplicando as transformadas de Galilei:

$$(x = x' + vt' ; y = y' ; z = z' ; t = t')$$

as leis da mecânica são as mesmas e portanto não podemos dizer se estamos nos movendo com velocidade constante ou não.

Mas, as equações de Maxwell mudavam... e portanto seria possível determinar a velocidade absoluta (???) do objeto...

Segundo Maxwell a velocidade da luz é c independente do movimento da fonte!!! (como o som!) portanto poderia ser utilizada para determinar a velocidade absoluta do trem (como?)...e assim foi feito...ou tentaram fazer...o resultado (a velocidade absoluta) foi zero!!!

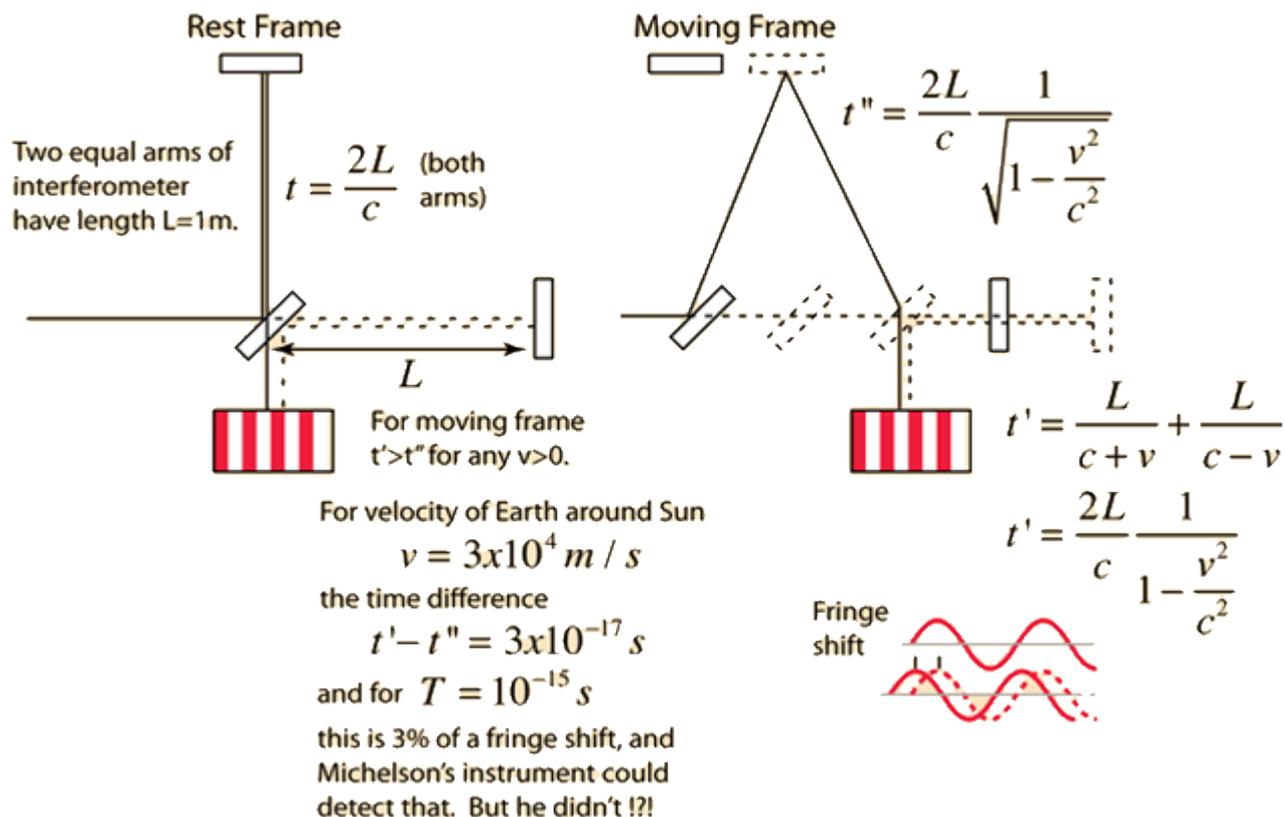


Relatividade Restrita: Michelson-Morley

De fato tentaram medir a velocidade da terra respeito do éter (qual éter?)

Em 1887 Michelson e Morley montaram um experimento baseado na interferência da luz (figura abaixo).

Qualquer mudança no movimento respeito do éter movimentaria as franjas de interferência!!! devido à mudança de velocidade da luz!!!

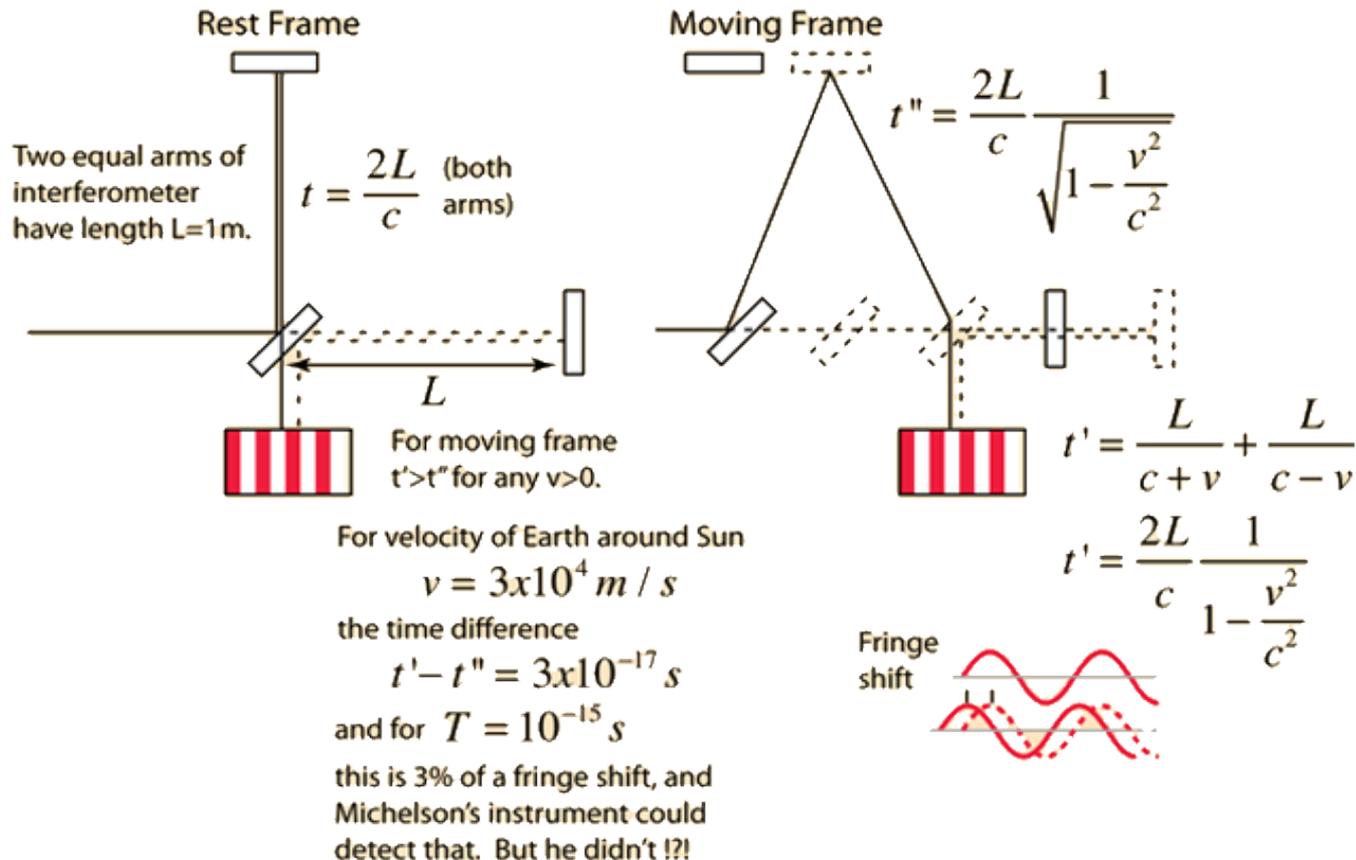


Relatividade Restrita: Michelson-Morley

Calculemos os tempos para percorrer as distâncias (t , t' e t'')

O equipamento era sensível a esta diferença!!!

Giraram o equipamento, repetiram, aumentaram as distâncias L , e nada!



Relatividade Restrita: Paradoxos

1º suspeito: as equações de Maxwell...deveriam estar erradas...

Como vimos, foi a partir do fato que as equações de Maxwell não obedeciam o Principio da Relatividade de Newton que tentamos medir a velocidade absoluta dos objetos.

Se as equações de Maxwell estavam erradas sabíamos como corrigir elas... seria só mudar elas para serem invariantes pela transformação de Galilei.

Não deu certo, os novos fenômenos descritos pelas “novas equações de Maxwell” não existiam.

...então onde estava o problema?

Paralelamente, um tal de Lorentz foi por outro caminho...como fazer uma transformação das equações de Maxwell de forma tal que não mudem ao mudar o sistema inercial de referencia!!!

O que Lorentz fez foi responder a uma curiosidade matemática e encontrou o seguinte:

Relatividade Restrita: Lorentz

Se as transformações seguissem a seguinte regra as equações de Maxwell seriam invariantes (S' se move com v respeito de S):

$$x = x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + vt \quad y = y' \quad z = z' \quad t = t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{vx}{c^2}$$

O que haveria que mudar seriam as leis da mecânica e não as de Maxwell! ...e derrubar 200 anos de certezas ???

O que era proposto é substituir a transformação de Galilei (evidente por ela mesma) pela de Lorentz (absolutamente estranha).

Para isso era suficiente mudar a massa das equações de Newton pela forma dada por Einstein:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Desta forma se restabelecia o princípio (suportado pelas experiências) de que não é possível determinar a velocidade absoluta de um corpo.

Relatividade Restrita: Consequências

Só que agora **as Leis da Física** (não só da mecânica) são então invariantes perante a transformação de Lorentz (e não de Galilei)

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Consequências:

1. As distâncias se contraem na direção do movimento?! (fazer $x_1 - x_2$)
...por esse motivo o experimento de Michelson não deu mudança na interferência...as distâncias permaneceram iguais!!!
2. O tempo se dilata?! (fazer $t_1 - t_2$ para o mesmo x')
3. Para quem se dilata? (se todos os referenciais são iguais!!!)
4. Também perdemos a simultaneidade dos eventos (explique)
5. Rotação em 4 dimensões (Feynman 15-8). Vetores 4D.
6. Para finalizar vamos ver como se modificam outras grandezas além do tempo e do espaço.....

Relatividade Restrita: Consequências

Lembrando a segunda Lei de Newton: $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$

Agora (com a nova m) temos que \vec{P} é : $\vec{P} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Agora o momento varia com a velocidade de forma diferente do que conhecemos da mecânica clássica!

Tende a ∞ quando v tende a c!

Assim, se uma força constante atua sobre um corpo teremos comportamentos diferentes! (na mecânica Newtoniana o corpo adquire velocidade,... na relativística adquire momento!)

Einstein também encontrou a relação $E=mc^2$

E a massa? (nossa primeira equação)....

Da mecânica de Newton sabemos que:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dE}{dt}$$

Também sabemos que:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Relatividade Restrita: Conseqüências

Substituindo e considerando que $E = mc^2$ teremos: $\frac{d(mc^2)}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d(m\vec{v})}{dt}$

Desta equação devemos deixar em evidencia m (multiplicamos por $2m$)

$$2mc^2 \frac{dm}{dt} = 2m\vec{v} \cdot \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad \text{ou} \quad c^2 \frac{dm^2}{dt} = \frac{d(m\vec{v})^2}{dt} = \frac{d(m^2 v^2)}{dt}$$

Integrando obtemos.... $m^2 c^2 = m^2 v^2 + A$

Considerando que para $v=0$ $m=m_0$ calculamos a constante A

$$m_0^2 c^2 = 0 + A$$

Substituindo A obtemos: $m^2 c^2 = m^2 v^2 + m_0^2 c^2$

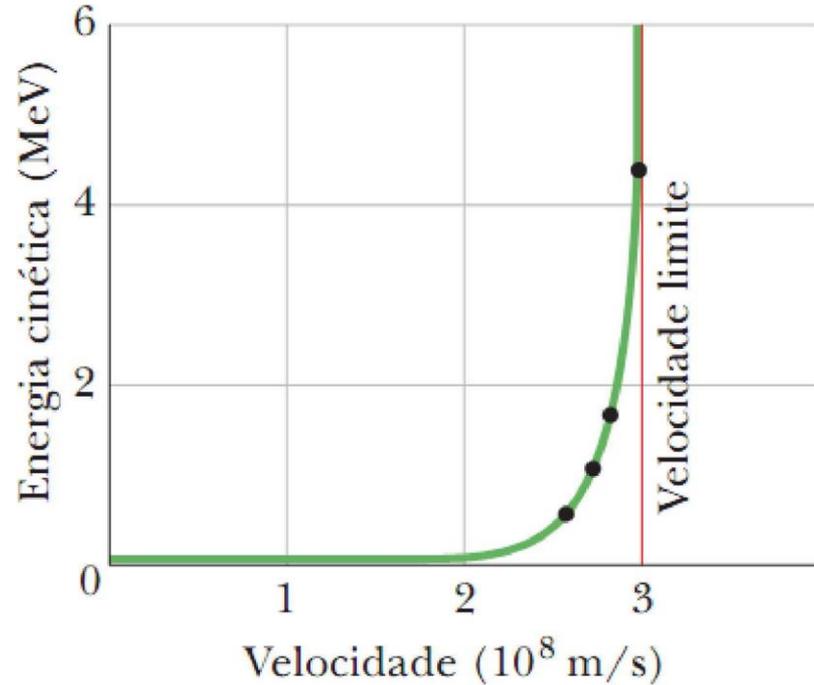
De onde obtemos:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Relatividade Restrita: Consequências

A velocidade limite foi definida como sendo exatamente

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$



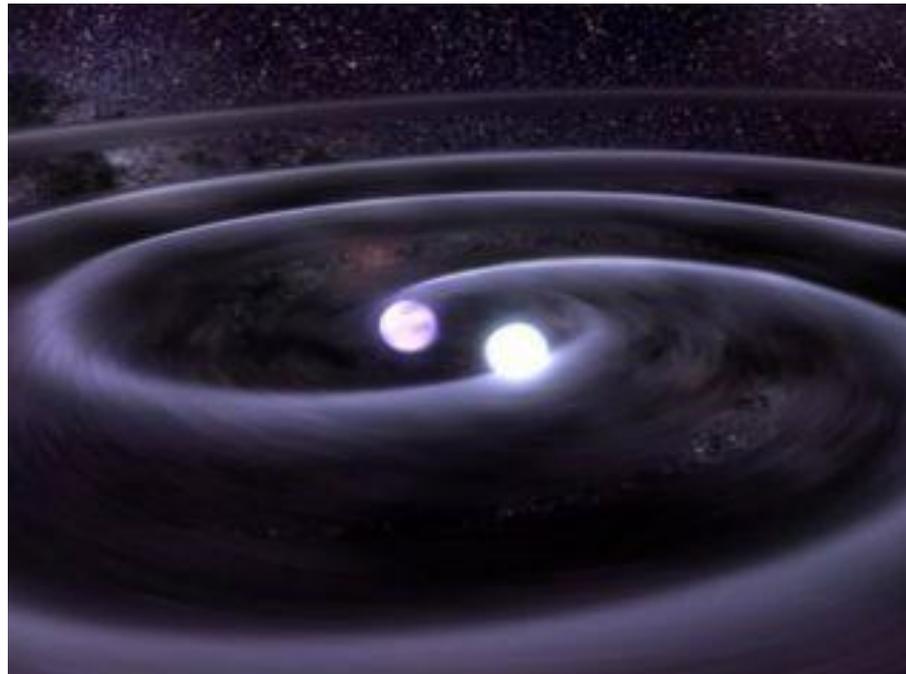
Os pontos mostram valores experimentais da energia cinética de um elétron para diferentes valores da velocidade. Por maior que seja a energia fornecida a um elétron (ou qualquer outra partícula com massa), a velocidade da partícula jamais atinge ou supera a velocidade limite c . (A curva que passa pelos pontos mostra as previsões da teoria da relatividade restrita de Einstein.)

Relatividade Restrita: mais Paradoxos

Vamos lembrar os dois componentes principais da Teoria da Relatividade:

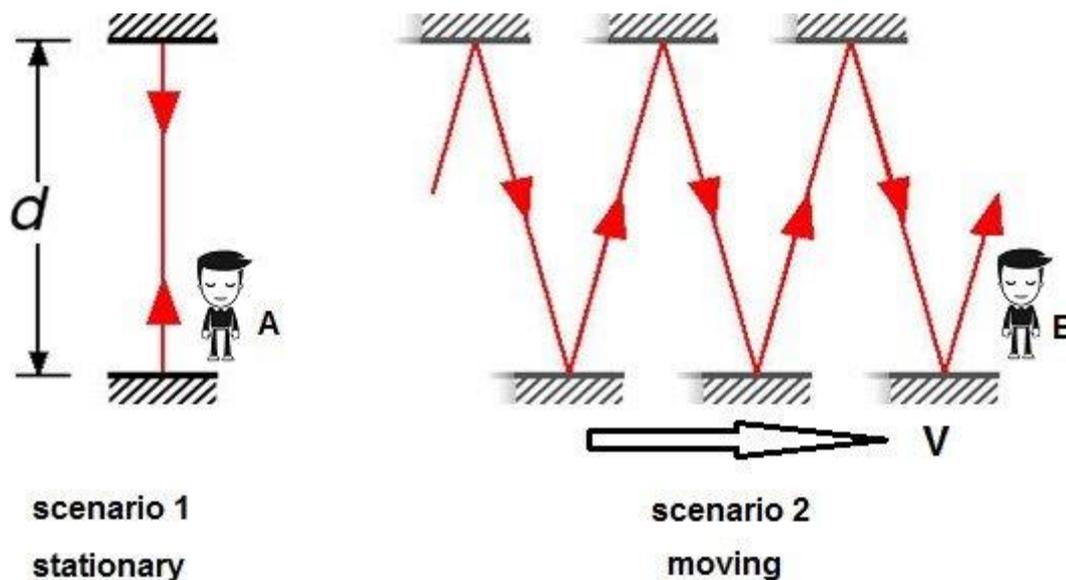
1. **As leis da física são as mesmas para todos os observadores em sistemas de referencia inerciais** (e portanto **não é possível** detectar o movimento uniforme absoluto)
2. **A luz viaja sempre à velocidade da luz** (o fim da física Newtoniana)

Estrelas binarias



Relatividade Restrita: mais Paradoxos

Vamos aprofundar um pouco nas consequências da constância da velocidade da luz.
O paradoxo da simultaneidade de eventos entre o trem e a plataforma

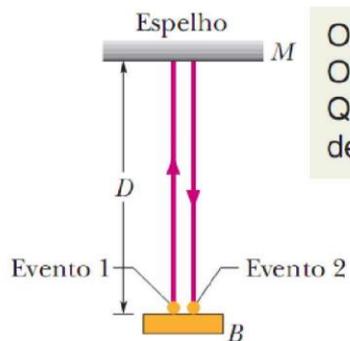


Portanto não existe um tempo universal!

.....mas o que é o tempo?...

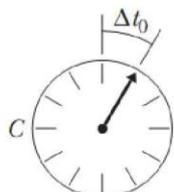
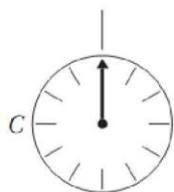
Relatividade Restrita: dilatação do tempo

O tempo e os relógios (relógio de luz)



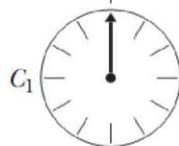
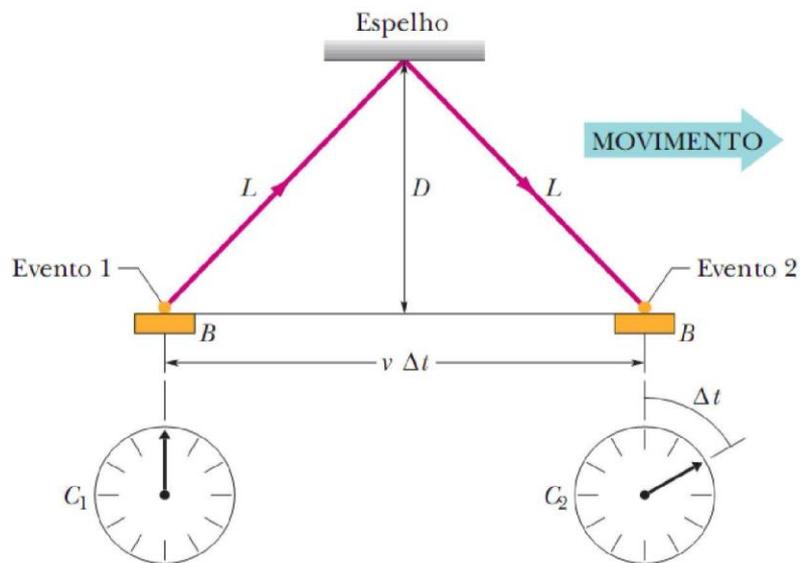
O evento 1 é a emissão de luz.
O evento 2 é o retorno da luz.
Queremos conhecer o intervalo de tempo.

O intervalo medido com o relógio de Maria é diferente do intervalo medido com os relógios de João por causa do movimento relativo.



Maria

(a)



João

(b)

Relatividade Restrita: dilatação do tempo

Quando dois eventos ocorrem no mesmo ponto de um referencial inercial, o intervalo de tempo entre os eventos, medido neste referencial, é chamado de **intervalo de tempo próprio** ou **tempo próprio**. Quando o intervalo de tempo entre os mesmos eventos é medido em outro referencial, **o resultado é sempre maior que o intervalo de tempo próprio**.

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \text{ (dilatação do tempo)}$$

No caso anterior, Maria mede um intervalo de tempo próprio e João mede um intervalo de tempo maior. O fenômeno do aumento do intervalo de tempo medido em consequência do movimento do referencial é chamado de **dilatação do tempo**.

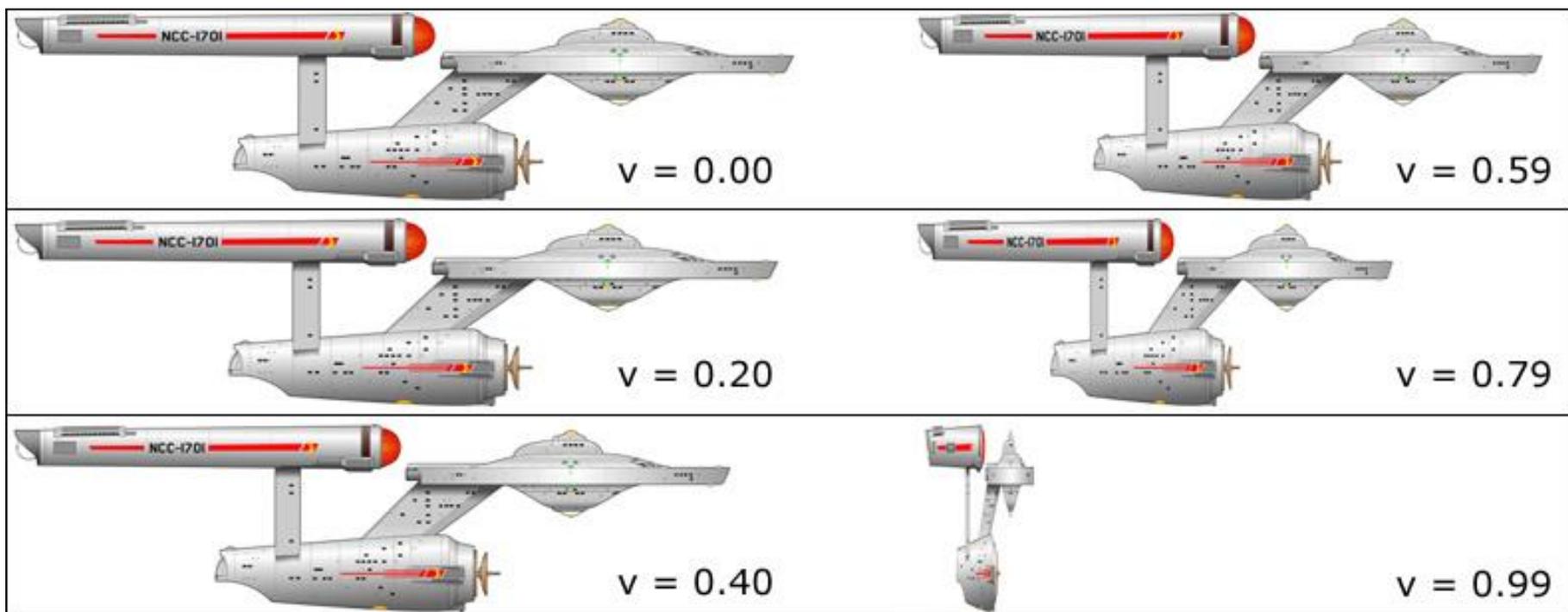
γ - é chamado de **fator de Lorentz**.

Relatividade Restrita: contração de L

Os relógios biológicos....

Ao final, quem está em movimento se todos os pontos de vista são equivalentes (e portanto quem é afetado pela dilatação do tempo)? ...paradoxo dos gêmeos...

Agora a questão do espaço..... a contração da distância...

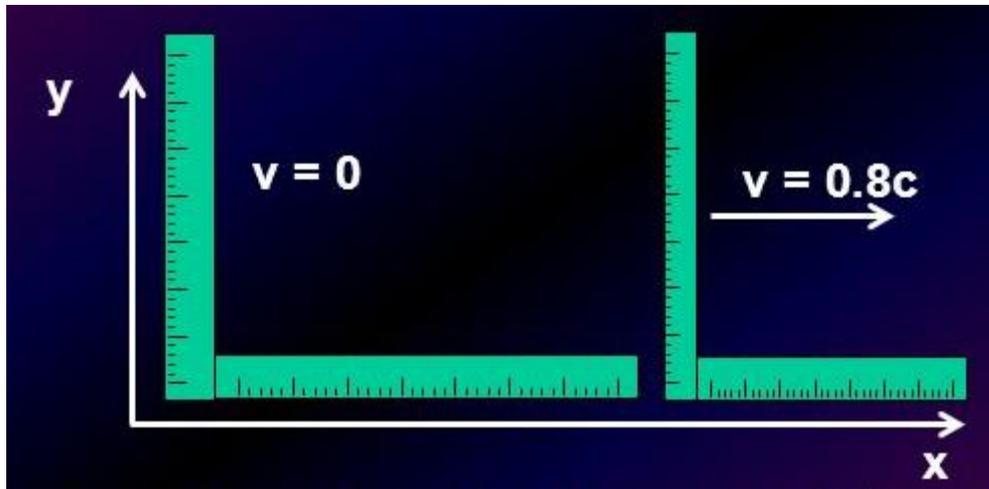


Relatividade Restrita: contração de L

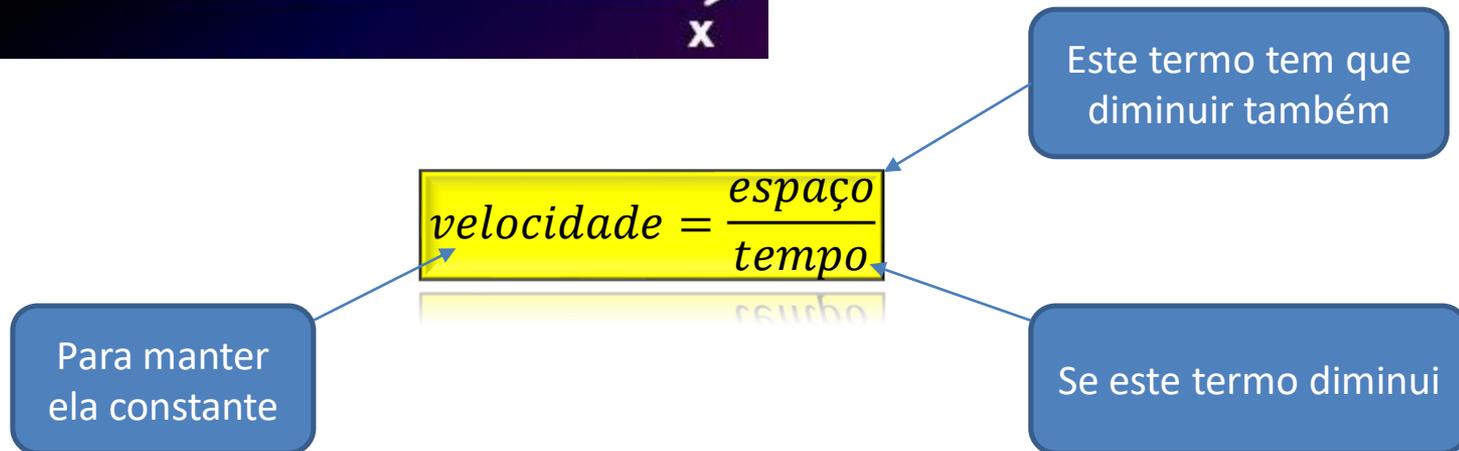
Já demonstramos que o movimento afeta o tempo...para demonstrar que afeta igualmente ao espaço é só mais um passo...

Imagine dois sistemas coordenados, um em repouso e outro idêntico em movimento à velocidade $0,8 C$.

Como a v afeta o comprimento da régua?

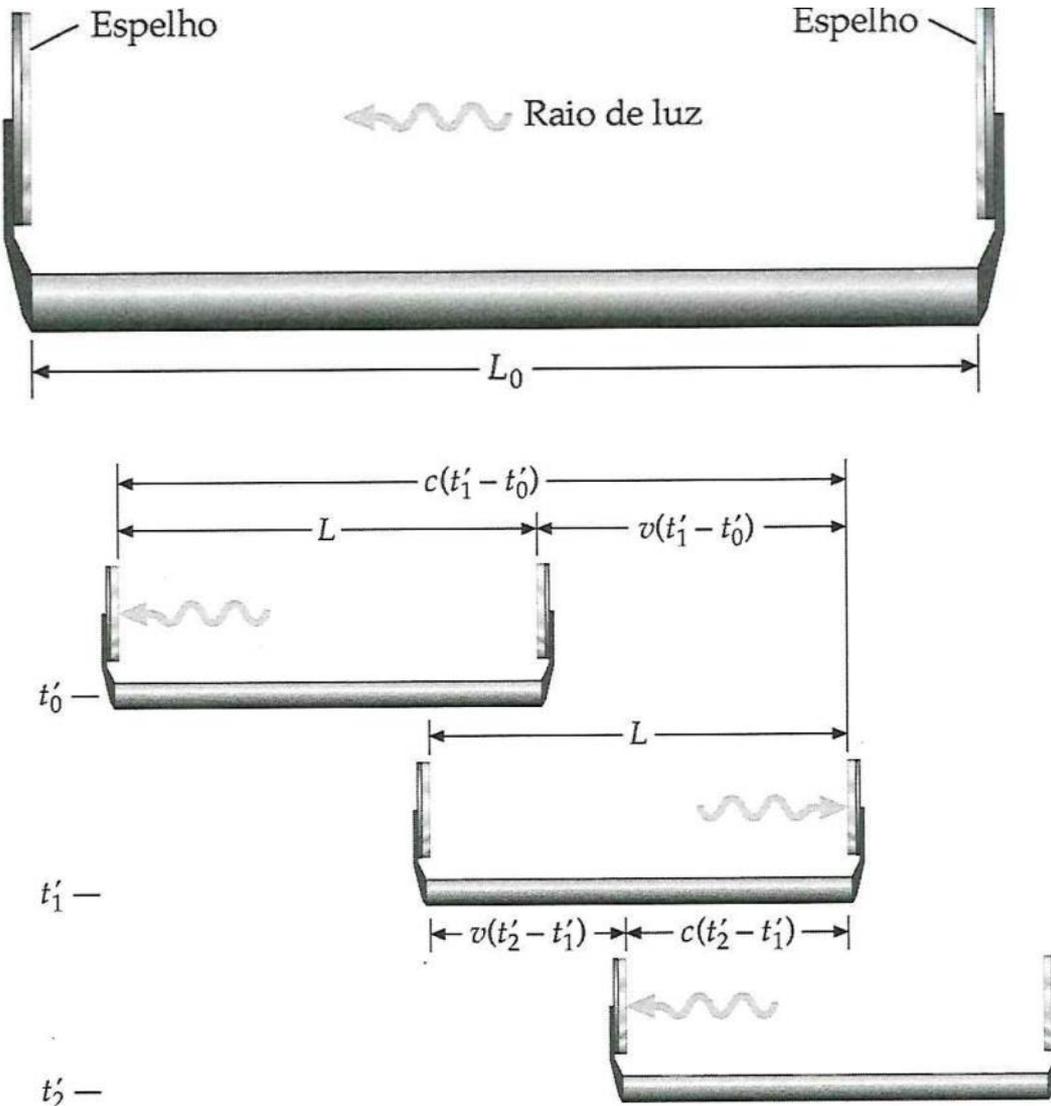


Lembrando que para o observador em repouso o tempo no sistema em movimento passa mais devagar mas ele tem que medir a mesma velocidade C portanto:



Relatividade Restrita: contração de L

Vejam os casos de medir o comprimento de uma régua em movimento



No SRP (Sistema de Referência Próprio) o comprimento do relógio de luz é L_0 e o tempo entre marcas (quando a luz bate nos espelhos) é $T_0 = \frac{2L_0}{c}$

No SR (Sistema de Referência) que se movimenta para a direita com velocidade v teremos:

Entre os momentos t'_0 e t'_1 o pulso de luz percorre uma distância $c(t'_1 - t'_0)$ portanto:

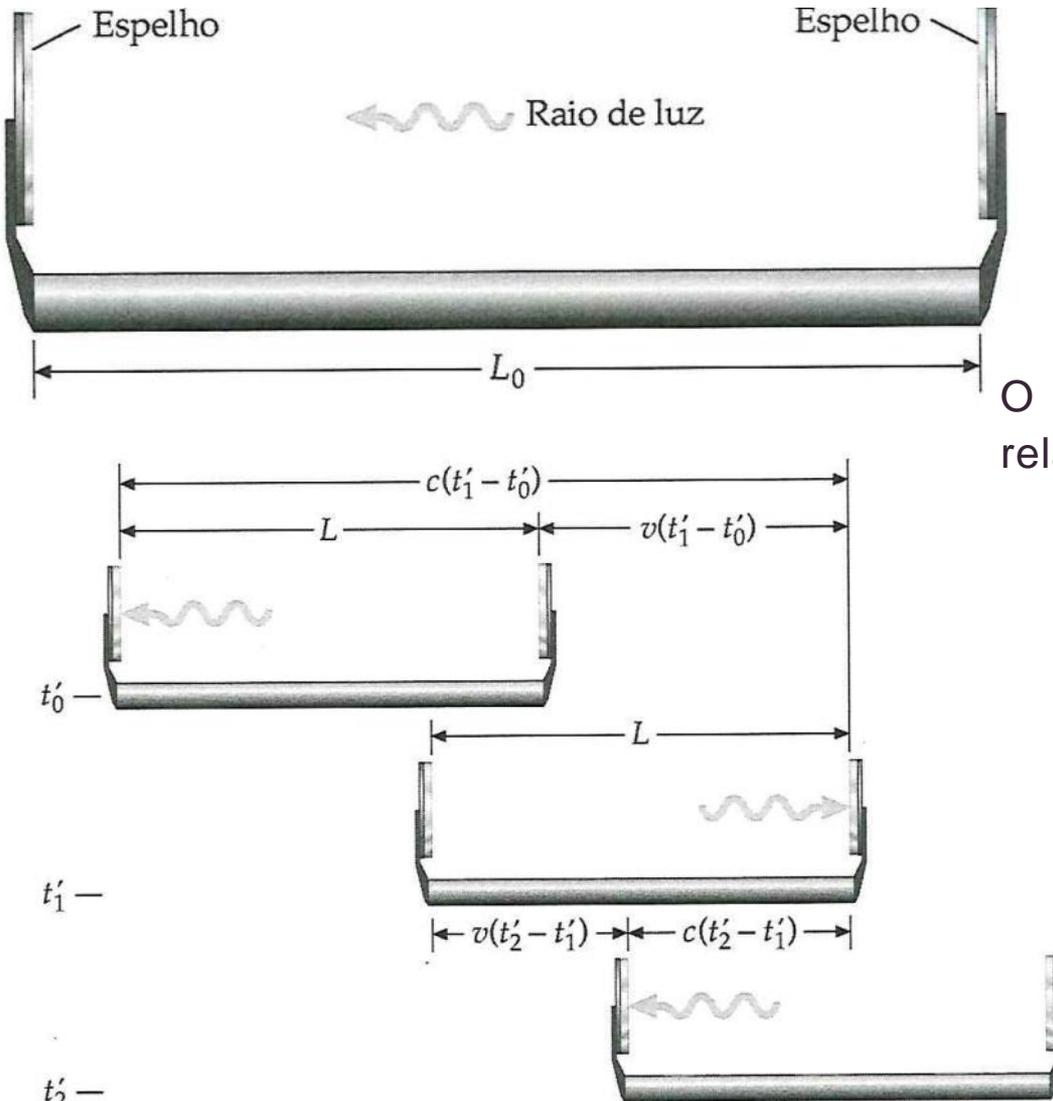
$$c(t'_1 - t'_0) = L + v(t'_1 - t'_0)$$

Entre os momentos t'_1 e t'_2 o relógio se move uma distância $v(t'_2 - t'_1)$ e o pulso percorre uma distância $c(t'_2 - t'_1)$ portanto:

$$c(t'_2 - t'_1) = L - v(t'_2 - t'_1)$$

Relatividade Restrita: contração de L

Vejam os casos de medir o comprimento de uma régua em movimento



A partir das equações

$$c(t'_1 - t'_0) = L + v(t'_1 - t'_0)$$

$$c(t'_2 - t'_1) = L - v(t'_2 - t'_1)$$

Podemos determinar $t'_2 - t'_0$:

$$t'_2 - t'_0 = \frac{\frac{2L}{c}}{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)} \quad (1)$$

O intervalo de tempo $t'_2 - t'_0$ está relacionado com o $t_2 - t_0$ segundo:

$$t'_2 - t'_0 = \frac{t_2 - t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

Nesta equação $t_2 - t_0 = \frac{2L_0}{c}$, portanto:

$$t'_2 - t'_0 = \frac{\frac{2L_0}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}} \quad (2)$$

Igualando (1) e (2) obtemos:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

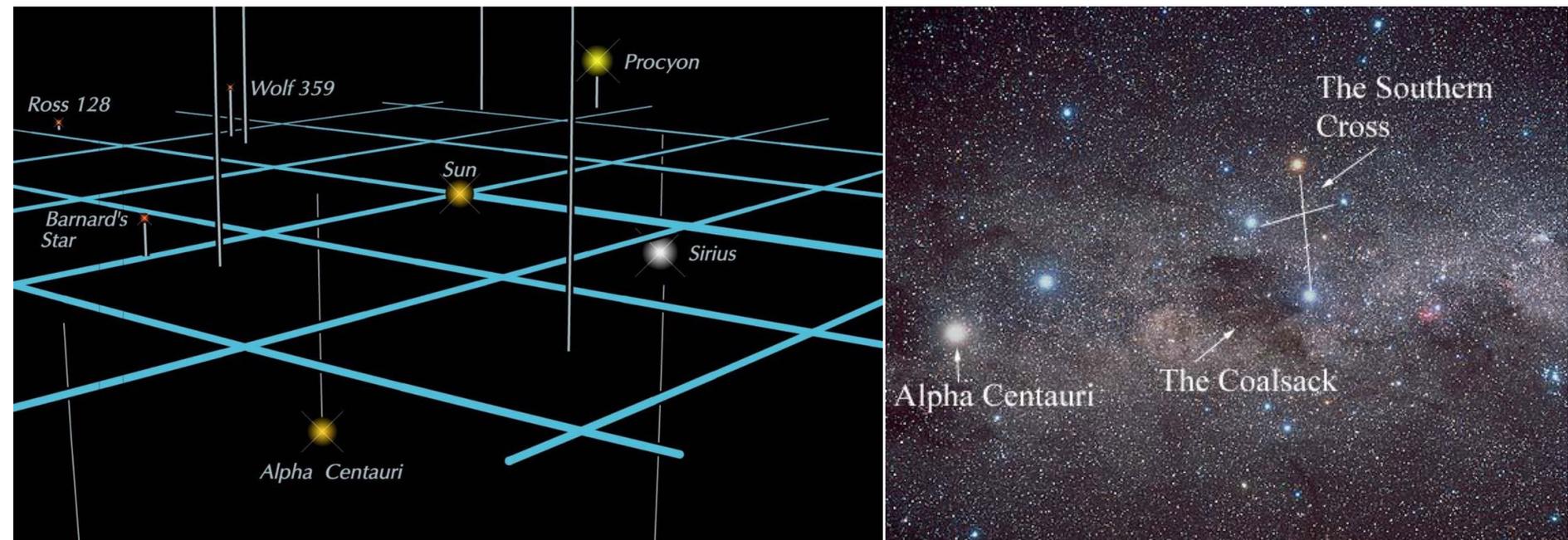
Relatividade Restrita: as distâncias

Analisando esta equação....

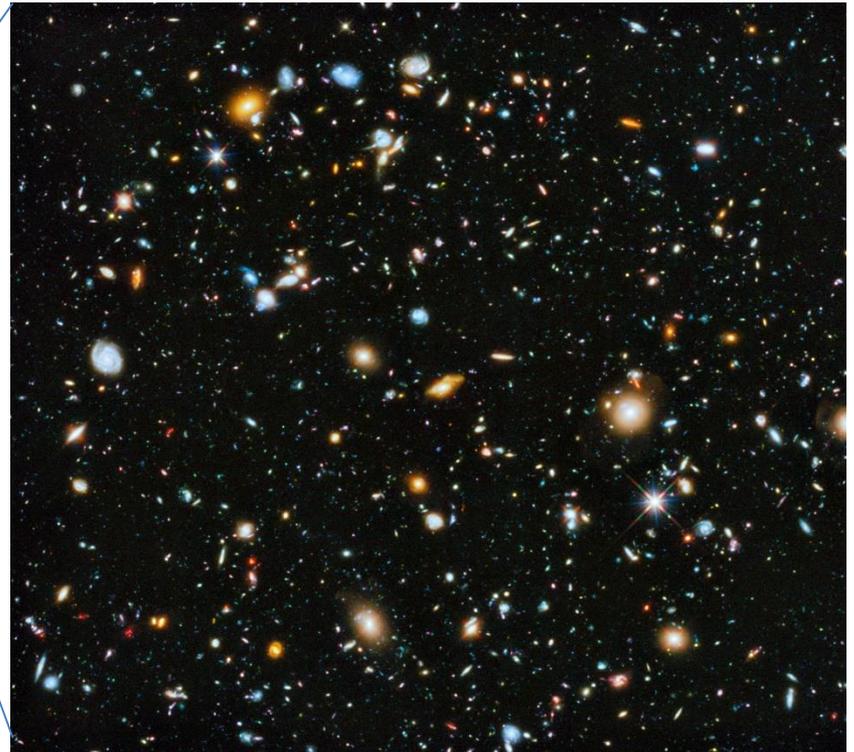
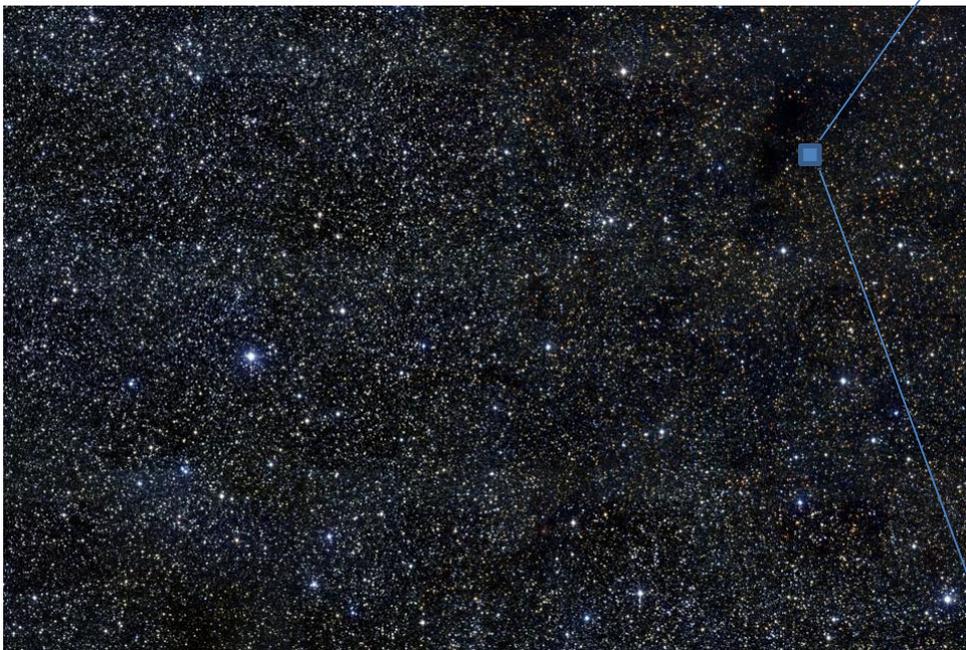
$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

À velocidade da luz as distâncias são iguais a zero!!!

Distância a alfa do centauro: 4,367 anos luz ou: **41.315.000.000.000 km**

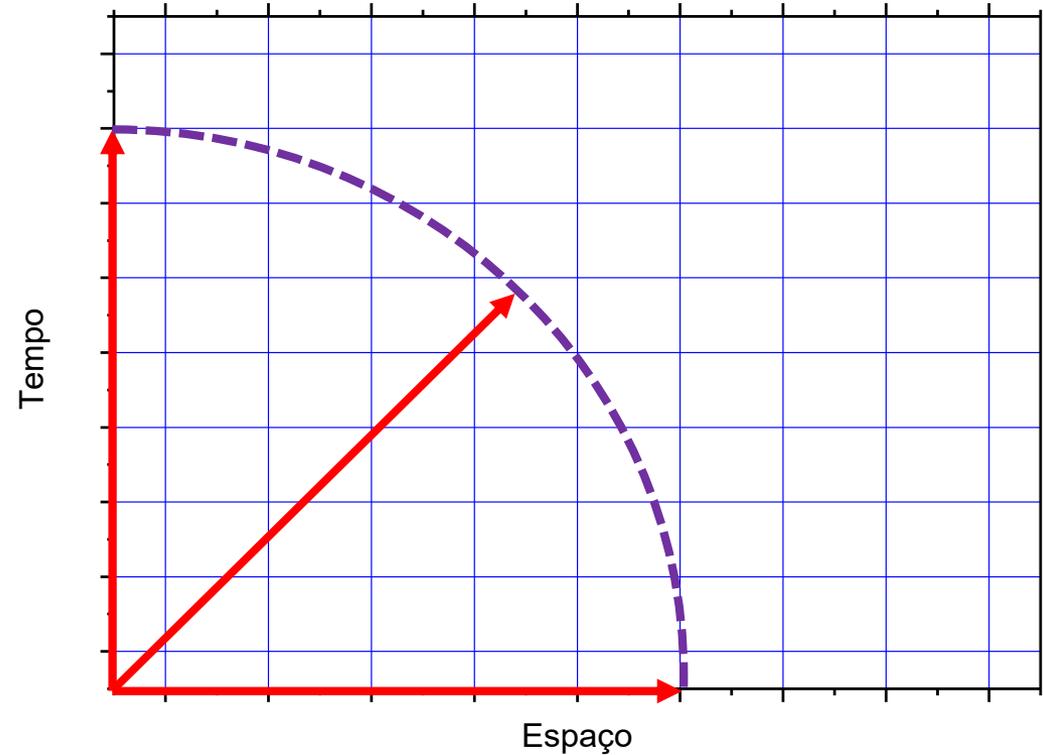
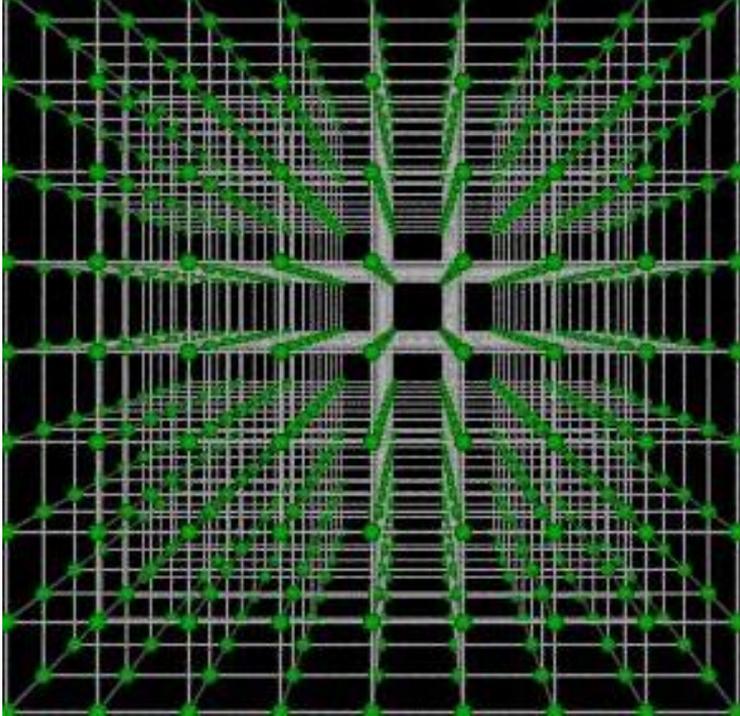


Relatividade Restrita: as distâncias



Relatividade Restrita: o movimento 4D

O movimento através do espaço tempo 4D: Einstein mostrou que todos os objetos se movimentam à velocidade da luz através do espaço-tempo 4D



Os fótons, o Big Bang e o tempo...

RESOLVER: DILATAÇÃO DO TEMPO

A espaçonave do leitor passa pela Terra com uma velocidade relativa de $0,9990c$. Depois de viajar durante 10,0 anos (tempo na espaçonave do leitor), para numa estação espacial, faz meia-volta e se dirige para a Terra com a mesma velocidade relativa. A viagem de volta também leva 10,0 anos (tempo do leitor na espaçonave). Quanto tempo leva a viagem de acordo com um observador terrestre? (Despreze os efeitos da aceleração)

Começamos por analisar o percurso de ida:

1. Este problema envolve medidas executadas em dois referenciais inerciais, um situado na Terra e outro em uma espaçonave.
2. O percurso de ida envolve dois eventos: o início da viagem, na Terra, e o fim da viagem, na estação espacial.

O tempo de 10 anos medido pelo leitor para o percurso de ida é o tempo próprio Δt_0 , já que os dois eventos **ocorrem** no mesmo local **no referencial** do leitor, que é a espaçonave.

4. De acordo com a equação $\Delta t = \gamma \Delta t_0$, o tempo da viagem de ida medido no referencial terrestre Δt , é maior que Δt_0

$$2 \cdot \Delta t = \frac{2 \cdot \Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{(0,9990c)^2}{c^2}}} = \frac{2 \cdot 10}{0,089286} = 448 \text{ anos}$$

RESOLVER: DILATAÇÃO DO TEMPO

A partícula elementar conhecida como *káon-mais* (K^+) tem um tempo médio de vida de $0,1237 \mu\text{s}$ quando está em repouso, isto é, quando o tempo de vida é medido no referencial do káon.

Se um *káon-mais* esta se movendo com uma velocidade de $0,990c$ em relação ao referencial do laboratório quando é produzido, **que distância a partícula percorre** nesse referencial durante o tempo médio de vida **de acordo com a física clássica** (que é uma aproximação razoável para velocidades muito menores que c) e de acordo com a **teoria da relatividade restrita** (que fornece o resultado correto para qualquer velocidade)?

Física clássica: Na física clássica, **obtemos a mesma** distancia e o mesmo intervalo de tempo quando medimos as duas grandezas no referencial do káon e no referencial do laboratório. Assim, não precisamos nos preocupar com o referencial em que são executadas as medições. Para **determinar** o tempo de percurso do káon de acordo com a física clássica, d_{Ka} , escrevemos

$$d_{Ka} = v \Delta t_0 = 0,990 \times 299.792.458 \times 0,1237 \cdot 10^{-6} = \mathbf{36,7 \text{ m}}$$

Na relatividade restrita: No referencial do laboratório o Δt não é mais o tempo próprio, o novo tempo será:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{(0,990c)^2}{c^2}}} = \frac{0,1237 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1 - \frac{(0,990c)^2}{c^2}}} = 0,8769 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

RESOLVER: DILATAÇÃO DO TEMPO

O tempo de $0,8769 \mu\text{s}$ é aproximadamente 7 vezes superior ao tempo médio de vida no referencial do Káon, ou seja, sofre a dilatação do tempo.

Agora calculamos a distância percorrida no referencial do laboratório...

$$d_{rel} = v \Delta t = 0,990 \times 299.792.458 \times 0,8769 \cdot 10^{-6} = \mathbf{260 \text{ m}}$$

A pergunta é: **Ao final que distância percorreu o Káon?** ou **onde ele está agora?**

O ponto central da questão da **contração da distância** é que para medir um comprimento de um objeto em movimento, ou medimos os extremos **simultaneamente** (dois pontos diferentes do espaço ao mesmo tempo) ou aguardamos um tempo para medir a passagem do objeto por um ponto fixo (e medimos um **intervalo de tempo**), ...

...em ambos casos as medidas serão relativas e **todas corretas!!!!**

Não há tempo absoluto assim como não há distâncias absolutas !!!

O espaço-tempo é relativo (flexível, particular de cada objeto).

RESOLVER: CONTRAÇÃO DA DISTÂNCIA

Na figura, Maria (no ponto A) e Joao (a bordo de uma espaçonave cujo comprimento próprio é $L_0 = 230$ m) passam um pelo outro com uma velocidade relativa constante v próxima da velocidade da luz.

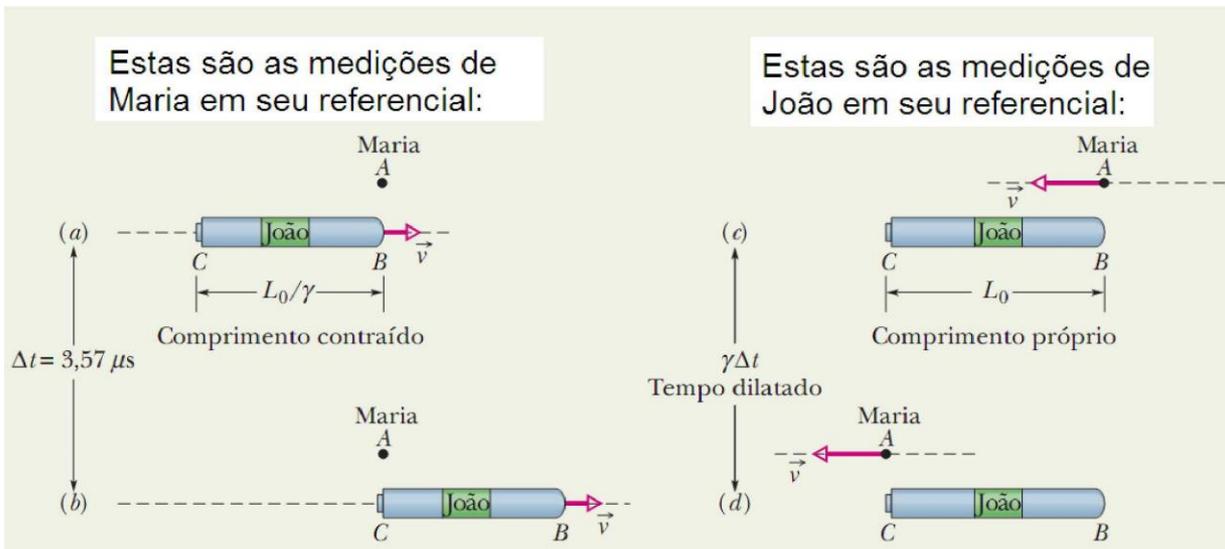
Segundo Maria, a nave leva $3,57 \mu\text{s}$ para passar (intervalo de tempo entre a passagem do ponto B e a passagem do ponto C).

Em termos de c (velocidade da luz), qual é a velocidade relativa v entre Maria e a nave?

Cálculos: Temos liberdade para escolher o referencial a ser usado nos cálculos. Como sabemos que o intervalo de tempo Δt entre os dois eventos no referencial de Maria é $3,57 \mu\text{s}$, vamos usar a distancia L entre os dois eventos nesse referencial. Portanto teremos:

$$v = \frac{L}{\Delta t} = \frac{L_0}{\gamma \Delta t} = \frac{L_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\Delta t}$$

Deixamos em evidência v :
$$v = \frac{L_0 c}{\sqrt{(c\Delta t)^2 - L_0^2}} = 0,21c$$



RESOLVER: FUGINDO DE UMA SUPERNOVA

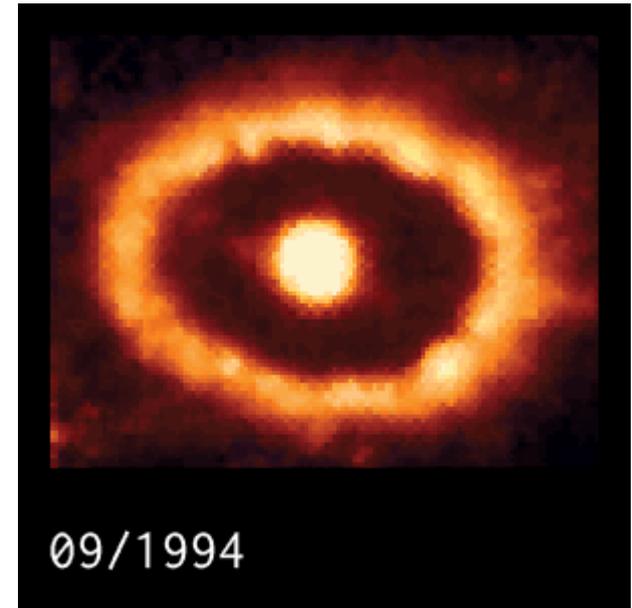
Surpreendido pela explosão de uma supernova, você acelera sua espaçonave ao máximo para fugir da onda de choque. O fator de Lorentz γ da sua espaçonave em relação ao referencial inercial das estrelas próximas é 22,4.

(a) Para atingir uma distancia segura, você calcula que deve viajar $9,00 \times 10^{16}$ m no referencial das estrelas próximas. Quanto tempo é necessário para isso, no mesmo referencial?

Solução:

Calculamos o tempo necessário para percorrer essa distancia dada com velocidade constante usando a definição de velocidade:

$$velocidade = \frac{distância}{intervalo\ de\ tempo}$$



Para um fator de Lorentz de 22,4 a velocidade é:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 22,4 \quad v = c \sqrt{1 - \left(\frac{1}{22,4}\right)^2} = 0,999c$$

Como distâncias e intervalos de tempo só fazem sentido se medidos no mesmo referencial!!! Utilizamos o referencial das estrelas...nesse referencial temos que:

RESOLVER: FUGINDO DE UMA SUPERNOVA

Surpreendido pela explosão de uma supernova, você acelera sua espaçonave ao máximo para fugir da onda de choque. O fator de Lorentz γ da sua espaçonave em relação ao referencial inercial das estrelas próximas é 22,4.

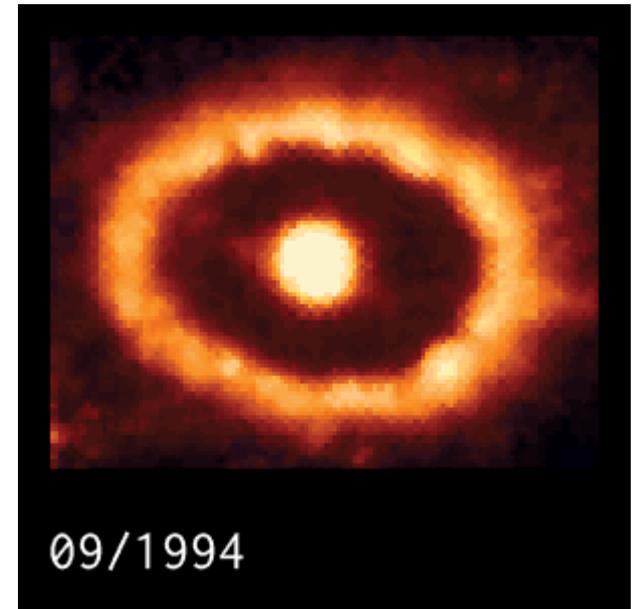
(a) Para atingir uma distancia segura, você calcula que deve viajar $9,00 \times 10^{16}$ m no referencial das estrelas próximas. Quanto tempo é necessário para isso, no mesmo referencial?

$$\Delta t = \frac{9 \cdot 10^{16}}{0,999c} = 9,53 \text{ anos}$$

(b) Quanto tempo leva essa viagem do ponto de vista da nave?

No referencial da nave teremos que o tempo transcorrido será:

$$\Delta t = \frac{9 \cdot 10^{16}}{22,4 \cdot 0,999c} = 0,425 \text{ anos}$$



Em ambos os casos a nave percorre a distância necessária para assegurar que não será pega pela onda de choque da supernova, o tempo dilata na espaçonave (passa mais devagar) e independentemente, e necessariamente, a distância diminui (contração).

A QUESTÃO CAUSA-EFEITO

Uma espaçonave foi enviada da Terra para uma base terrestre no planeta P1407, em cuja lua surgiu uma anomalia desconhecida e instável que ameaça a base terrestre.

Quando a nave está passando pelo planeta e pela lua em uma trajetória retilínea, detecta uma emissão de micro-ondas proveniente da anomalia e em seguida, 1,10 s mais tarde, uma explosão na base terrestre, que está a $4,00 \times 10^8$ m de distância da base terrestre no referencial da nave. Tudo leva a crer que a emissão da anomalia foi a causa da destruição da base terrestre.

(a) A velocidade da nave em relação ao planeta e sua lua é $0,980c$. Determine a distância e o intervalo de tempo entre a emissão e a explosão no referencial do sistema planeta-lua (e, portanto, no referencial dos ocupantes da base).

Como $v = 0,98c$ fator o fator de Lorentz neste caso é:

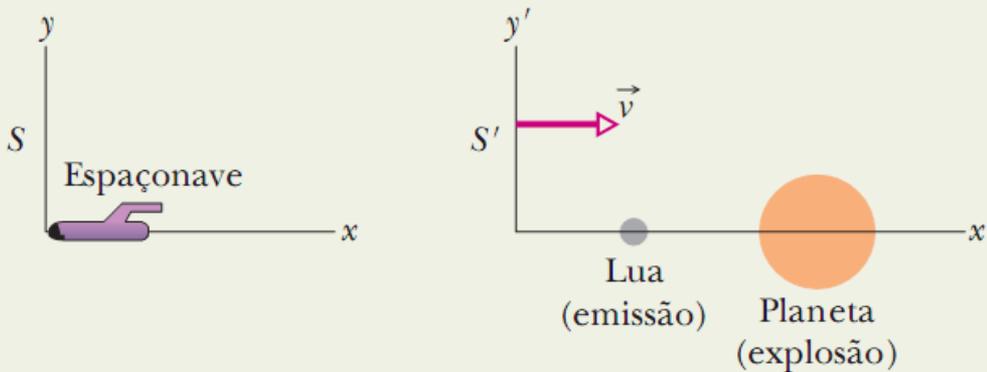
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 5,0252$$

A distância (no referencial planeta-lua):

$$\Delta x' = \gamma [\Delta x - v\Delta t]$$

$$\Delta x' = 5,0252 [4 \cdot 10^8 - 0] = 2,01 \cdot 10^9$$

O movimento relativo altera o intervalo de tempo entre dois eventos e pode alterar até mesmo a sequência dos eventos.



O intervalo de tempo (no referencial planeta-lua) é: $\Delta t' = \gamma \left[\Delta t - \frac{v \Delta x}{c^2} \right]$ $\Delta t' = 5,0252 \left[1,1 - \frac{0,98c (4 \cdot 10^8)}{c^2} \right] = -1,04$ s

A QUESTÃO CAUSA-EFEITO

O que significa o sinal negativo no resultado $-1,04$ s ?

Lembrando que o intervalo entre a emissão e a explosão observado desde a espaçonave foi definido como:

$$\Delta t = t_{exp} - t_{emi} = 1,10 \text{ s}$$

Portanto no referencial Planeta-Lua o intervalo de tempo terá a mesma ordem ou seja:

$$\Delta t' = t'_{exp} - t'_{emi}$$

E essa diferença será $\Delta t' = t'_{exp} - t'_{emi} = -1,04$ s

Isso significa que neste referencial a emissão acontece 1,04 segundos DEPOIS da explosão e não 1,10 segundos antes, como no referencial da nave!

A emissão causou a explosão, a explosão causou a emissão ou não estão relacionados?

Vamos verificar com que velocidade a informação teria que viajar entre o planeta (explosão) e a lua (emissão), no referencial da nave esta velocidade seria:

$$v_{info} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4 \cdot 10^8}{1,10} = 3,64 \cdot 10^8 > c !!!!$$

no referencial planeta-lua seria (explosão causaria a emissão):

$$v_{info} = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{2,01 \cdot 10^9}{1,04} = 1,9 \cdot 10^9 > c !!!!$$

PORTANTO NÃO HÁ NENHUMA RELAÇÃO CAUSA EFEITO ENTRE ESTES EVENTOS, ELES NÃO ESTÃO RELACIONADOS.

O EFEITO DOPPLER PARA A LUZ

O *efeito Doppler* é a mudança da frequência de uma onda causada pelo movimento da fonte ou do observador.

Seja f_0 a *frequência própria* da fonte, ou seja, a frequência medida no sistema de referência no qual a fonte se encontra em repouso, e seja T_0 o tempo entre duas cristas consecutivas (dois máximos) nesse mesmo referencial. Neste referencial (no sistema de referência da própria fonte) temos que $T_0 = 1/f_0$.

Qual é a frequência medida por um observador se a fonte está se aproximando com velocidade v em relação a este observador?

Seja T o tempo entre duas cristas consecutivas observadas no sistema de referência do observador (por exemplo na Terra). Evidentemente, considerando que as cristas foram emitidas em posições diferentes (devido ao movimento da fonte) o intervalo T entre elas no referencial Terra não será o mesmo que T_0 (no referencial da fonte) e portanto as frequências serão diferentes.

Durante o tempo T uma crista se move uma distância cT e a fonte se move uma distância vT no mesmo sentido, a distância λ entre duas cristas consecutivas é portanto:

$$\lambda = (c-v) \cdot T$$

O EFEITO DOPPLER PARA A LUZ

Logo a frequência ($f = c/\lambda$) no referencial Terra será:

$$f = \frac{c}{(c - v)T}$$

Até aqui tudo foi feito como no caso do som....mas no caso do som, o passo seguinte foi igualar os tempos T e T_0 (tempos entre as emissões de duas cristas) o que não é correto no caso da relatividade...segundo a relatividade estes tempos se relacionam da seguinte forma (já sabemos isso)

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}} = \frac{cT_0}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Como $T_0 = 1/f_0$

$$\frac{1}{T} = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{cT_0} = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c} f_0$$

Cuidado, pois $1/T$ não é f !!!...para calcular f substituímos na primeira equação $1/T$

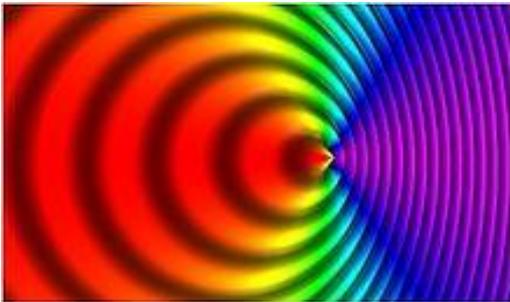
$$f = \frac{c}{(c-v)} \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c} f_0 = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} f_0 \quad (\text{fonte se aproximando})$$

O EFEITO DOPPLER PARA A LUZ

Com a fonte se afastando teremos (invertemos o sinal de v)

$$f = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} f_0 \quad (\text{fonte se afastando})$$

No caso da luz, o efeito Doppler depende apenas da **velocidade relativa** entre a fonte e o observador (não existe distinção entre o movimento da fonte e a do observador como no caso do som).



Fonte se deslocando para a direita com velocidade $v = 0,7 c$

