LISTA 03_4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
Equações não homogêneas. Método dos parâmetros indeterminados
Respostas no final
Gabaritos na página do professor

Em cada um dos problemas de 1 a 14, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

1. $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2t}$
2. $y'' + 2y' + 5y = 3 \text{ sen } 2t$
3. $y'' - y' - 2y = -2t + 4t^2$
4. $y'' + y' - 6y = 12e^{3t} + 12e^{-2t}$
5. $y'' - 2y' - 3y = -3te^{-t}$
6. $y'' + 2y' = 3 + 4 \text{ sen } 2t$
7. $y'' + 9y' = t^2e^{3t} + 6$
8. $y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$
9. $2y'' + 3y' + y = t^2 + 3 \text{ sen } t$
10. $y'' + y = 3 \text{ sen } 2t + t \cos 2t$
11. $u'' + \omega_0^2 u = \cos \omega t, \qquad \omega^2 \neq \omega_0^2$
12. $u'' + \omega_0^2 u = \cos \omega_0 t$
13. $y'' + y' + 4y = 2 \text{ senh } t$
    Sugestão: $\text{senh } t = (e^t + e^{-t})/2$
14. $y'' - y' - 2y = \cosh 2t$
    Sugestão: $\cosh t = (e^t - e^{-t})/2$

Em cada um dos problemas de 15 a 20, encontre a solução do problema de valor inicial dado.

15. $y'' + y' - 2y = 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
16. $y'' + 4y = t^2 + 3e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$
17. $y'' - 2y' + y = te^t + 4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
18. $y'' - 2y' - 3y = 3te^{2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
19. $y'' + 4y = 3 \text{ sen } 2t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
20. $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t} \cos 2t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

Em cada um dos problemas de 21 a 28:
(a) Determine uma forma adequada para $Y(t)$ para usar o método dos coeficientes indeterminados.
(b) Use um sistema de álgebra computacional para encontrar uma solução particular da equação dada.

21. $y'' + 3y' = 2t^4 + t^2e^{-3t} + \text{sen } 3t$
22. $y'' + y = t(1 + \text{sen } t)$
23. $y'' - 5y' + 6y = e^t \cos 2t + e^{2t}(3t + 4) \text{ sen } t$
24. $y'' + 2y' + 2y = 3e^{-t} + 2e^{-t} \cos t + 4e^{-t}t^2 \text{ sen } t$

25. $y'' - 4y' + 4y = 2t^2 + 4te^{2t} + t \operatorname{sen} 2t$

26. $y'' + 4y = t^2 \operatorname{sen} 2t + (6t + 7) \cos 2t$

27. $y'' + 3y' + 2y = e^t(t^2 + 1) \operatorname{sen} 2t + 3e^{-t} \cos t + 4e^t$

28. $y'' + 2y' + 5y = 3te^{-t} \cos 2t - 2te^{-2t} \cos t$

29. Considere a equação

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t} \qquad \text{(i)}$$

do Exemplo 5. Lembre-se de que $y_1(t) = e^{-t}$ e $y_2(t) = e^{4t}$ são soluções da equação homogênea associada. Adaptando o método de redução de ordem (Seção 3.4), busque uma solução da equação não homogênea da forma $Y(t) = v(t)y_1(t) = v(t)e^{-t}$, em que $v(t)$ é uma função a ser determinada.

(a) Substitua $Y(t)$, $Y'(t)$ e $Y''(t)$ na Eq. (i) e mostre que $v(t)$ deve satisfazer $v'' - 5v' = 2$.

(b) Seja $w(t) = v'(t)$ e mostre que $w(t)$ tem que satisfazer $w' - 5w = 2$. Resolva esta equação para $w(t)$.

(c) Integre $w(t)$ para encontrar $v(t)$ e depois mostre que

$$Y(t) = -\tfrac{2}{5}te^{-t} + \tfrac{1}{5}c_1e^{4t} + c_2e^{-t}.$$

A primeira parcela é a solução particular desejada da equação não homogênea. Note que é um produto de t e de e^{-t}.

30. Determine a solução geral de

$$y'' + \lambda^2 y = \sum_{m=1}^{N} a_m \operatorname{sen} m\pi t,$$

em que $\lambda > 0$ e $\lambda \neq m\pi$ para $m = 1, \ldots, N$.

31. Em muitos problemas físicos, o termo não homogêneo pode ser especificado por fórmulas diferentes em períodos de tempo diferentes. Como exemplo, determine a solução $y = \phi(t)$ de

$$y'' + y = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \pi, \\ \pi e^{\pi - t}, & t > \pi, \end{cases}$$

que satisfaz as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$. Suponha, também, que y e y' são contínuas em $t = \pi$. Faça o gráfico do termo não homogêneo e da solução em função do tempo.

Sugestão: Primeiro resolva o problema de valor inicial para $t \leq \pi$; depois resolva para $t > \pi$, determinando as constantes nesta última solução a partir das condições de continuidade em $t = \pi$.

32. Siga as instruções no Problema 31 para resolver a equação diferencial

$$y'' + 2y' + 5y = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \pi/2, \\ 0, & t > \pi/2 \end{cases}$$

com condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

Comportamento de Soluções quando $t \to \infty$. Nos Problemas 33 e 34, continuamos a discussão iniciada nos problemas de 37 a 39 da Seção 3.4. Considere a equação diferencial

$$ay'' + by' + cy = g(t), \qquad \text{(i)}$$

em que a, b e c são constantes positivas.

33. Se $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ são soluções da Eq. (i), mostre que $Y_1(t) - Y_2(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Este resultado é verdadeiro se $b = 0$?

34. Se $g(t) = d$, uma constante, mostre que toda solução da Eq. (i) tende a d/c quando $t \to \infty$. O que acontece se $c = 0$? E se b também for nulo?

35. Indicamos, neste problema, um procedimento[7] diferente para resolver a equação diferencial

$$y'' + by' + cy = (D^2 + bD + c)y = g(t), \qquad \text{(i)}$$

em que b e c são constantes, e D denota diferenciação em relação a t. Sejam r_1 e r_2 os zeros do polinômio característico em que b e c são constantes, e D denota diferenciação em relação a t. Sejam r_1 e r_2 os zeros do polinômio característico da equação homogênea associada. Essas raízes podem ser reais e distintas, reais e iguais, ou números complexos conjugados.

(a) Verifique se a Eq. (i) pode ser escrita na forma fatorada

$$(D - r_1)(D - r_2)y = g(t),$$

em que $r_1 + r_2 = -b$ e $r_1 r_2 = c$.

(b) Seja $u = (D - r_2)y$. Mostre que a solução da Eq. (i) pode ser encontrada resolvendo as duas equações de primeira ordem a seguir:

$$(D - r_1)u = g(t), \qquad (D - r_2)y = u(t).$$

Em cada um dos Problemas de 36 a 39, use o método do Problema 35 para resolver a equação diferencial dada.

36. $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$ (veja o Exemplo 1)
37. $2y'' + 3y' + y = t^2 + 3 \text{ sen } t$ (veja o Problema 9)
38. $y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$ (veja o Problema 8)
39. $y'' + 2y' = 3 + 4 \text{ sen } 2t$ (veja o Problema 6)

Nota referente ao problema 35:

[7] R. S. Luthar, “Another Approach to a Standard Differential Equation”, Two Year College Mathematics Journal 10 (1979), pp. 200-201. Veja também D. C. Sandell e F. M. Stein, “Factorization of Operators of Second Order Linear Homogeneous Ordinary Differential Equations”, Two Year College Mathematics Journal 8 (1977), pp. 132-141, para uma discussão mais geral de operadores que fatoram.

RESPOSTAS

1. $y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - e^{2t}$
2. $y = c_1 e^{-t}\cos 2t + c_2 e^{-t}\,\text{sen}\, 2t + \frac{3}{17}\,\text{sen}\, 2t - \frac{12}{17}\cos 2t$
3. $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - \frac{7}{2} + 3t - 2t^2$
4. $y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} + 2e^{3t} - 3e^{-2t}$
5. $y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} + \frac{3}{16} t e^{-t} + \frac{3}{8} t^2 e^{-t}$
6. $y = c_1 + c_2 e^{-2t} + \frac{3}{2} t - \frac{1}{2}\,\text{sen}\, 2t - \frac{1}{2}\cos 2t$
7. $y = c_1 \cos 3t + c_2\,\text{sen}\, 3t + \frac{1}{162}(9t^2 - 6t + 1)e^{3t} + \frac{2}{3}$
8. $y = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + t^2 e^{-t}$
9. $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t/2} + t^2 - 6t + 14 - \frac{3}{10}\,\text{sen}\, t - \frac{9}{10}\cos t$
10. $y = c_1 \cos t + c_2\,\text{sen}\, t - \frac{1}{3} t\cos 2t - \frac{5}{9}\,\text{sen}\, 2t$
11. $u = c_1 \cos \omega_0 t + c_2\,\text{sen}\, \omega_0 t + (\omega_0^2 - \omega^2)^{-1}\cos \omega t$
12. $u = c_1 \cos \omega_0 t + c_2\,\text{sen}\, \omega_0 t + (1/2\omega_0) t\,\text{sen}\, \omega_0 t$
13. $y = c_1 e^{-t/2}\cos(\sqrt{15}\, t/2) + c_2 e^{-t/2}\,\text{sen}(\sqrt{15}\, t/2) + \frac{1}{6} e^{t} - \frac{1}{4} e^{-t}$
14. $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + \frac{1}{6} t e^{2t} + \frac{1}{8} e^{-2t}$
15. $y = e^{t} - \frac{1}{2} e^{-2t} - t - \frac{1}{2}$
16. $y = \frac{7}{10}\,\text{sen}\, 2t - \frac{19}{40}\cos 2t + \frac{1}{4} t^2 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5} e^{t}$
17. $y = 4te^{t} - 3e^{t} + \frac{1}{6} t^3 e^{t} + 4$
18. $y = e^{3t} + \frac{2}{3} e^{-t} - \frac{2}{3} e^{2t} - te^{2t}$
19. $y = 2\cos 2t - \frac{1}{8}\,\text{sen}\, 2t - \frac{3}{4} t\cos 2t$
20. $y = e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2} e^{-t}\,\text{sen}\, 2t + te^{-t}\,\text{sen}\, 2t$
21. **(a)** $Y(t) = t(A_0 t^4 + A_1 t^3 + A_2 t^2 + A_3 t + A_4) + t(B_0 t^2 + B_1 t + B_2)e^{-3t} + D\,\text{sen}\, 3t + E\cos 3t$

    (b) $A_0 = 2/15, A_1 = -2/9, A_2 = 8/27, A_3 = -8/27, A_4 = 16/81, B_0 = -1/9, B_1 = -1/9, B_2 = -2/27, D = -1/18, E = -1/18$
22. **(a)** $Y(t) = A_0 t + A_1 + t(B_0 t + B_1)\,\text{sen}\, t + t(D_0 t + D_1)\cos t$

    (b) $A_0 = 1, A_1 = 0, B_0 = 0, B_1 = 1/4, D_0 = -1/4, D_1 = 0$
23. **(a)** $Y(t) = e^{t}(A\cos 2t + B\,\text{sen}\, 2t) + (D_0 t + D_1)e^{2t}\,\text{sen}\, t + (E_0 t + E_1)e^{2t}\cos t$

    (b) $A = -1/20, B = -3/20, D_0 = -3/2, D_1 = -5, E_0 = 3/2, E_1 = 1/2$
24. **(a)** $Y(t) = Ae^{-t} + t(B_0 t^2 + B_1 t + B_2)e^{-t}\cos t + t(D_0 t^2 + D_1 t + D_2)e^{-t}\,\text{sen}\, t$

    (b) $A = 3, B_0 = -2/3, B_1 = 0, B_2 = 1, D_0 = 0, D_1 = 1, D_2 = 1$
25. **(a)** $Y(t) = A_0 t^2 + A_1 t + A_2 + t^2(B_0 t + B_1)e^{2t} + (D_0 t + D_1)\,\text{sen}\, 2t + (E_0 t + E_1)\cos 2t$

    (b) $A_0 = 1/2, A_1 = 1, A_2 = 3/4, B_0 = 2/3, B_1 = 0, D_0 = 0, D_1 = -1/16, E_0 = 1/8, E_1 = 1/16$
26. **(a)** $Y(t) = t(A_0 t^2 + A_1 t + A_2)\,\text{sen}\, 2t + t(B_0 t^2 + B_1 t + B_2)\cos 2t$

    (b) $A_0 = 0, A_1 = 13/16, A_2 = 7/4, B_0 = -1/12, B_1 = 0, B_2 = 13/32$
27. **(a)** $Y(t) = (A_0 t^2 + A_1 t + A_2)e^{t}\,\text{sen}\, 2t + (B_0 t^2 + B_1 t + B_2)e^{t}\cos 2t + e^{-t}(D\cos t + E\,\text{sen}\, t) + Fe^{t}$

    (b) $A_0 = 1/52, A_1 = 10/169, A_2 = -1233/35.152, B_0 = -5/52, B_1 = 73/676, B_2 = -4105/35.152, D = -3/2, E = 3/2, F = 2/3$
28. **(a)** $Y(t) = t(A_0 t + A_1)e^{-t}\cos 2t + t(B_0 t + B_1)e^{-t}\,\text{sen}\, 2t + (D_0 t + D_1)e^{-2t}\cos t + (E_0 t + E_1)e^{-2t}\,\text{sen}\, t$

    (b) $A_0 = 0, A_1 = 3/16, B_0 = 3/8, B_1 = 0, D_0 = -2/5, D_1 = -7/25, E_0 = 1/5, E_1 = 1/25$
29. **(b)** $\omega = -\frac{2}{5} + c_1 e^{5t}$

30. $y = c_1 \cos \lambda t + c_2 \operatorname{sen} \lambda t + \sum_{m=1}^{N} [a_m/(\lambda^2 - m^2\pi^2)] \operatorname{sen} m\pi t$

31. $y = \begin{cases} t, & 0 \le t \le \pi \\ -(1 + \pi/2) \operatorname{sen} t - (\pi/2) \cos t + (\pi/2)e^{\pi - t}, & t > \pi \end{cases}$

32. $y = \begin{cases} \frac{1}{5} - \frac{1}{10}e^{-t} \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{5}e^{-t} \cos 2t, & 0 \le t \le \pi/2 \\ -\frac{1}{5}(1 + e^{\pi/2})e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{10}(1 + e^{\pi/2})e^{-t} \operatorname{sen} 2t, & t > \pi/2 \end{cases}$

33. Não

36. $y = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2}e^{2t}$