**LISTA 02_3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS**

**Equações exatas**

**Respostas no final**

**Gabaritos na página do professor**

Determine se cada uma das equações nos problemas de 1 a 12 é exata. Se for, encontre a solução.

1. $(2x + 3) + (2y - 2)y' = 0$
2. $(2x + 4y) + (2x - 2y)y' = 0$
3. $(3x^2 - 2xy + 2) + (6y^2 - x^2 + 3)y' = 0$
4. $(2xy^2 + 2y) + (2x^2y + 2x)y' = 0$
5. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ax + by}{bx + cy}$
6. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ax - by}{bx - cy}$
7. $(e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x) + (e^x \cos y + 2 \cos x)y' = 0$
8. $(e^x \operatorname{sen} y + 3y) - (3x - e^x \operatorname{sen} y)y' = 0$
9. $(ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \operatorname{sen} 2x + 2x) + (xe^{xy} \cos 2x - 3)y' = 0$
10. $(y/x + 6x) + (\ln x - 2)y = 0, \; x > 0$
11. $(x \ln y + xy) + (y \ln x + xy)y' = 0; \quad x > 0, y > 0$
12. $\dfrac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \dfrac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \dfrac{dy}{dx} = 0$

Em cada um dos Problemas 13 e 14, resolva o problema de valor inicial dado e determine, pelo menos aproximadamente, onde a solução é válida.

13. $(2x' - y) + (2y - x)y' = 0, \; y(1) = 3$
14. $(9x^2 + y - 1) - (4y - x)y' = 0, \quad y(1) = 0$

Em cada um dos Problemas 15 e 16, encontre o valor de $b$ para o qual a equação dada é exata e depois a resolva usando esse valor de $b$.

15. $(xy^2 + bx^2y) + (x + y)x^2y' = 0$
16. $(ye^{2xy} + x) + bxe^{2xy}\, y' = 0$
17. Suponha que a Eq. (6) satisfaz as condições do Teorema 2.6.1 em um retângulo $R$ e é, portanto, exata. Mostre que uma função $\psi(x, y)$ possível é

$$\psi(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(s, y_0)\, ds + \int_{y_0}^{y} N(x, t)\, dt,$$

em que $(x_0, y_0)$ é um ponto em $R$.

18. Mostre que qualquer equação separável

$$M(x) + N(y)y' = 0$$

também é exata.

Em cada um dos problemas de 19 a 22, mostre que a equação dada não é exata, mas torna-se exata quando multiplicada pelo fator integrante dado. Depois resolva a equação.

19. $x^2y^3 + x(1 + y^2)y' = 0, \quad \mu(x, y) = 1/xy^3$

20. $\left(\dfrac{\operatorname{sen} y}{y} - 2e^{-x}\operatorname{sen} x\right) + \left(\dfrac{\cos y + 2e^{-x}\cos x}{y}\right)y' = 0, \qquad \mu(x, y) = ye^x$

21. $y + (2x - ye^y)y' = 0, \quad \mu(x, y) = y$

22. $(x + 2)\operatorname{sen} y + (x\cos y)y' = 0, \quad \mu(x, y) = xe^x$

23. Mostre que, se $(N_x - M_y)/M = Q$, em que $Q$ é uma função só de $y$, então a equação diferencial

$$M + Ny' = 0$$

tem um fator integrante da forma

$$\mu(y) = \exp\int Q(y)\,dy.$$

24. Mostre que, se $(N_x - M_y)/(xM - yN) = R$, em que $R$ só depende do produto $xy$; então a equação diferencial

$$M + Ny' = 0$$

tem um fator integrante da forma $\mu(xy)$. Encontre uma fórmula geral para esse fator integrante.

Em cada um dos problemas de 25 a 31, encontre um fator integrante e resolva a equação dada.

25. $(3x^2y + 2xy + y^3) + (x^2 + y^2)y' = 0$

26. $y' = e^{2x} + y - 1$

27. $1 + (x/y - \operatorname{sen} y)y' = 0$

28. $y + (2xy - e^{-2y})y' = 0$

29. $e^x + (e^x\cot y + 2y\csc y)y' = 0$

30. $[4(x^3/y^2) + (3/y)] + [3(x/y^2) + 4y]y' = 0$

31. $\left(3x + \dfrac{6}{y}\right) + \left(\dfrac{x^2}{y} + 3\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{dy}{dx} = 0$

*Sugestão*: Veja o Problema 24.

32. Resolva a equação diferencial

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$$

usando o fator integrante $\mu(x, y) = [xy(2x + y)]^{-1}$. Verifique se a solução é a mesma que a obtida no Exemplo 4 com um fator integrante diferente.

# RESPOSTAS

**1.** $x^2 + 3x + y^2 - 2y = c$

**2.** Não é exata

**3.** $x^3 - x^2y + 2x + 2y^3 + 3y = c$

**4.** $x^2y^2 + 2xy = c$

**5.** $ax^2 + 2bxy + cy^2 = k$

**6.** Não é exata

**7.** $e^x \operatorname{sen} y + 2y \cos x = c$; também $y = 0$

**8.** Não é exata

**9.** $e^{xy} \cos 2x + x^2 - 3y = c$

**10.** $y \ln x + 3x^2 - 2y = c$

**11.** Não é exata

**12.** $x^2 + y^2 = c$

**13.** $$y = \left[x + \sqrt{28 - 3x^2}\right]/2, \quad |x| < \sqrt{28/3}$$

**14.** $y = [x - (24x^3 + x^2 - 8x - 16)^{1/2}]/4, \quad x > 0{,}9846$

**15.** $b = 3; \quad x^2y^2 + 2x^3y = c$

**16.** $b = 1; \quad e^{2xy} + x^2 = c$

**19.** $x^2 + 2 \ln |y| - y^{-2} = c;$ também $y = 0$

**20.** $e^x \operatorname{sen} y + 2y \cos x = c$

**21.** $xy^2 - (y^2 - 2y + 2)e^y = c$

**22.** $x^2e^x \operatorname{sen} y = c$

**24.** $$\mu(t) = \exp \int R(t)\, dt, \quad \text{onde} \quad t = xy$$

**25.** $\mu(x) = e^{3x}; \quad (3x^2y + y^3)e^{3x} = c$

**26.** $\mu(x) = e^{-x}; \quad y = ce^x + 1 + e^{2x}$

**27.** $\mu(y) = y$; $xy + y \cos y - \text{sen}\, y = c$

**28.** $\mu(y) = e^{2y}/\, y$; $xe^{2y} - \ln |y| = c$; também $y = 0$

**29.** $\mu(y) = \text{sen}\, y$; $e^x \,\text{sen}\, y + y^2 = c$

**30.** $\mu(y) = y^2$; $x^4 + 3xy + y^4 = c$

**31.** $\mu(x, y) = xy$; $x^3y + 3x^2 + y^3 = c$