LISTA 02_2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Equações separáveis

Respostas no final

Gabaritos na página do professor

Em cada um dos problemas de 1 a 8, resolva a equação diferencial dada.

1. $y' = x^2/y$
2. $y' = x^2/y(1+x^3)$
3. $y' + y^2 \operatorname{sen} x = 0$
4. $y' = (3x^2 - 1)/(3 + 2y)$
5. $y' = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$
6. $xy' = (1 - y^2)^{1/2}$
7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{1+y^2}$
8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{1+y^2}$

Em cada um dos problemas de 9 a 20:

(a) Encontre a solução do problema de valor inicial dado em forma explícita.

(b) Desenhe o gráfico da solução.

(c) Determine (pelo menos aproximadamente) o intervalo no qual a solução está definida.

9. $y' = (1 - 2x)y^2, \quad y(0) = -1/6$
10. $y' = (1 - 2x)/y, \quad y(1) = -2$
11. $x\,dx + ye^{-x}dy = 0, \quad y(0) = 1$
12. $dr/d\theta = r^2/\theta, \quad r(1) = 2$
13. $y' = 2x/(y + x^2y), \quad y(0) = -2$
14. $y' = xy^3(1 + x^2)^{-1/2}, \quad y(0) = 1$
15. $y' = 2x/(1 + 2y), \quad y(2) = 0$
16. $y' = x(x^2 + 1)/4y^3, \quad y(0) = -1/\sqrt{2}$
17. $y' = (3x^2 - e^x)/(2y - 5), \quad y(0) = 1$
18. $y' = (e^{-x} - e^x)/(3 + 4y), \quad y(0) = 1$
19. $\operatorname{sen} 2x\,dx + \cos 3y\,dy = 0, \quad y(\pi/2) = \pi/3$
20. $y^2(1 - x^2)^{1/2}dy = \operatorname{arcsen} x\,dx, \quad y(0) = 1$

Alguns dos resultados pedidos nos problemas de 21 a 28 podem ser obtidos resolvendo-se a equação dada analiticamente ou gerando-se gráficos de aproximações numéricas das soluções. Tente formar uma opinião sobre as vantagens e desvantagens de cada abordagem.

21. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = (1 + 3x^2)/(3y^2 - 6y), \quad y(0) = 1$$

e determine o intervalo de validade da solução.

Sugestão: Para encontrar o intervalo de validade, procure pontos nos quais a curva integral tem uma tangente vertical.

22. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = 3x^2/(3y^2 - 4), \quad y(1) = 0$$

e determine o intervalo de validade da solução.

Sugestão: Para encontrar o intervalo de validade, procure pontos onde a curva integral tem uma tangente vertical.

23. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = 2y^2 + xy^2, \quad y(0) = 1$$

e determine onde a solução atinge seu valor mínimo.

24. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = (2 - e^x)/(3 + 2y), \quad y(0) = 0$$

e determine onde a solução atinge seu valor máximo.

25. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = 2\cos 2x/(3 + 2y), \quad y(0) = -1$$

e determine onde a solução atinge seu valor máximo.

26. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = 2(1 + x)(1 + y^2), \quad y(0) = 0$$

e determine onde a solução atinge seu valor mínimo.

27. Considere o problema de valor inicial

$$y' = ty(4 - y)/3, \quad y(0) = y_0.$$

(a) Determine o comportamento da solução em função do valor inicial y_0 quando t aumenta.

(b) Suponha que $y_0 = 0{,}5$. Encontre o instante T no qual a solução atinge, pela primeira vez, o valor 3,98.

28. Considere o problema de valor inicial

$$y' = ty(4 - y)/(1 + t), \quad y(0) = y_0 > 0.$$

(a) Determine o comportamento da solução quando $t \to \infty$.

(b) Se $y_0 = 2$, encontre o instante T no qual a solução atinge, pela primeira vez, o valor 3,99.

(c) Encontre o intervalo de valores iniciais para os quais a solução fica no intervalo $3{,}99 < y < 4{,}01$ no instante $t = 2$.

29. Resolva a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay+b}{cy+d},$$

em que a, b, c e d são constantes.

Equações Homogêneas. Se a função à direita do sinal de igualdade na equação $dy/dx = f(x, y)$ puder ser expressa como uma função só de y/x, então a equação é dita homogênea.[1] Tais equações sempre podem ser transformadas em equações separáveis por uma mudança da variável dependente. O Problema 30 ilustra como resolver equações homogêneas de primeira ordem.

30. Considere a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-4x}{x-y}. \tag{i}$$

(a) Mostre que a Eq. (i) pode ser colocada na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y/x)-4}{1-(y/x)}; \tag{ii}$$

logo, a Eq. (i) é homogênea.

(b) Introduza uma nova variável dependente v de modo que $v = y/x$, ou $y = xv(x)$. Expresse dy/dx em função de x, v e dv/dx.

(c) Substitua y e dy/dx na Eq. (ii) pelas expressões no item (b) envolvendo v e dv/dx. Mostre que a equação diferencial resultante é

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v-4}{1-v},$$

ou

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2-4}{1-v}. \tag{iii}$$

Note que a Eq. (iii) é separável.

(d) Resolva a Eq. (iii) obtendo v implicitamente em função de x.

(e) Encontre a solução da Eq. (i) substituindo v por y/x na solução encontrada no item (d).

(f) Desenhe um campo de direções e algumas curvas integrais para a Eq. (i). Lembre-se de que a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (i) depende, de fato, apenas da razão y/x. Isso significa que as curvas integrais têm a mesma inclinação em todos os pontos pertencentes a uma mesma reta contendo a origem, embora essa inclinação varie de uma reta para outra. Portanto, o campo de direções e as curvas integrais são simétricos em relação à origem. Essa propriedade de simetria é evidente em seus gráficos?

O método esboçado no Problema 30 pode ser usado em qualquer equação homogênea. Ou seja, a substituição $y = xv(x)$ transforma uma equação homogênea em uma equação separável. Esta última equação pode ser resolvida por integração direta, e depois a substituição de v por y/x fornece a solução da equação original. Em cada um dos problemas de 31 a 38:

(a) Mostre que a equação dada é homogênea.

(b) Resolva a equação diferencial.

(c) Desenhe um campo de direções e algumas curvas integrais. Elas são simétricas em relação à origem?

31. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$

32. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + 3y^2}{2xy}$

33. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y - 3x}{2x - y}$

34. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x + 3y}{2x + y}$

35. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 3y}{x - y}$

36. $(x^2 + 3xy + y^2)\,dx - x^2dy = 0$

37. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - 3y^2}{2xy}$

38. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3y^2 - x^2}{2xy}$

RESPOSTAS

1. $3y^2 - 2x^3 = c;\ \ y \neq 0$

2. $3y^2 - 2\ln|1 + x^3| = c;\ \ x \neq -1, y \neq 0$

3. $y^{-1} + \cos x = c$ se $y \neq 0$; também $y = 0$; em toda a parte

4. $3y + y^2 - x^3 + x = c; y \neq -3/2$

5. $2\tan 2y - 2x - \operatorname{sen} 2x = c$ se $\cos 2y \neq 0$; também $y = \pm(2n + 1)\pi/4$ para qualquer inteiro n; em toda a parte

6. $y = \operatorname{sen}[\ln|x| + c]$ se $x \neq 0$ e $|y| < 1$; também $y = \pm 1$

7. $y^2 - x^2 + 2(e^y - e^{-x}) = c; y + e^y \neq 0$

8. $3y + y^3 - x^3 = c$; em toda a parte

9. **(a)** $y = 1/(x^2 - x - 6)$

(c) $-2 < x < 3$

10. **(a)** $y = -\sqrt{2x - 2x^2 + 4}$

(c) $-1 < x < 2$

11. **(a)** $y = [\,2(1 - x)e^x - 1]^{1/2}$

(c) $-1{,}68 < x < 0{,}77$ aproximadamente

12. **(a)** $r = 2/(1 - 2\ln\theta)$

(c) $0 < \theta < \sqrt{e}$

13. **(a)** $y = -[\,2\ln(1 + x^2) + 4]^{1/2}$

(c) $-\infty < x < \infty$

14. **(a)** $y = \left[3 - 2\sqrt{1 + x^2}\right]^{-1/2}$

(c) $|x| < \frac{1}{2}\sqrt{5}$

15. **(a)** $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 - 15}$

(c) $x > \frac{1}{2}\sqrt{15}$

16. **(a)** $y = -\sqrt{(x^2 + 1)/2}$

(c) $-\infty < x < \infty$

17. **(a)** $y = 5/2 - \sqrt{x^3 - e^x + 13/4}$

(c) $-1{,}4445 < x < 4{,}6297$ aproximadamente

18. **(a)** $y = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{65 - 8e^x - 8e^{-x}}$

(c) $|x| < 2{,}0794$ aproximadamente

19. **(a)** $y = [\pi - \operatorname{arcsen}(3\cos^2 x)]/3$

(c) $|x - \pi/2| < 0{,}6155$

20. **(a)** $y = \left[\frac{3}{2}(\text{arcsen}\, x)^2 + 1\right]^{1/3}$

(c) $-1 < x < 1$

21. $y^3 - 3y^2 - x - x^3 + 2 = 0, \quad |x| < 1$

22. $y^3 - 4y - x^3 = -1, \quad |x^3 - 1| < 16/3\sqrt{3}$ ou $-1{,}28 < x < 1{,}60$

23. $y = -1/(x^2/2 + 2x - 1); \quad x = -2$

24. $y = -3/2 + \sqrt{2x - e^x + 13/4}; \quad x = \ln 2$

25. $y = -3/2 + \sqrt{\text{sen}\, 2x + 1/4}; \quad x = \pi/4$

26. $y = \tan(x^2 + 2x); x = -1$

27. **(a)** $y \to 4$ se $y_0 \to 0$; $y = 0$ se $y_0 = 0$; $y \to -\infty$ se $y_0 < 0$

(b) $T = 3{,}29527$

28. **(a)** $y \to 4$ quando $t \to \infty$

(b) $T = 2{,}84367$

(c) $3{,}6622 < y_0 < 4{,}4042$

29. $x = \frac{c}{a}y + \frac{ad - bc}{a^2}\ln|ay + b| + k; \quad a \neq 0,\ ay + b \neq 0$

30. **(e)** $|y + 2x|^3|y - 2x| = c$

31. **(b)** $\arctan(y/x) - \ln|x| = c$

32. **(b)** $x^2 + y^2 - cx^3 = 0$

33. **(b)** $|y - x| = c|y + 3x|^5$; também $y = x$

34. **(b)** $|y + x|\,|y + 4x|^2 = c$

35. **(b)** $2x/(x + y) + \ln|x + y| = c$; também $y = -x$

36. **(b)** $x/(x + y) + \ln|x| = c$; também $y = -x$

37. **(b)** $|x|^3|x^2 - 5y^2| = c$

38. **(b)** $c\,|x|^3 = |y^2 - x^2|$