LISTA 01_1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
Modelos Matemáticos
Respostas no final
Gabaritos na página do professor

Em cada um dos problemas de 1 a 6, desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Baseado no campo de direções, determine o comportamento de y quando $t \to \infty$. Se esse comportamento depender do valor inicial de y em t = 0, descreva essa dependência (utilize algum software).

1. $y' = 3 - 2y$
2. $y' = 2y - 3$
3. $y' = 3 + 2y$
4. $y' = -1 - 2y$
5. $y' = 1 + 2y$
6. $y' = y + 2$

Em cada um dos problemas de 7 a 10, escreva uma equação diferencial da forma $dy/dt = ay + b$ cujas soluções têm o comportamento descrito quando $t \to \infty$.

7. Todas as soluções tendem a y = 3.
8. Todas as soluções tendem a y = 2/3.
9. Todas as outras soluções divergem de y = 2.
10. Todas as outras soluções divergem de y = 1/3.

Em cada um dos problemas de 11 a 14, desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Baseado no campo de direções, determine o comportamento de y quando $t \to \infty$. Se esse comportamento depender do valor inicial de y em t = 0, descreva essa dependência. Note que, nesses problemas, as equações não são da forma $y' = ay + b$, e o comportamento de suas soluções é um pouco mais complicado do que o das soluções das equações da aula (utilize algum software).

11. $y' = y(4 - y)$
12. $y' = -y(5 - y)$
13. $y' = y2$
14. $y' = y(y - 2)2$

Considere a seguinte lista de equações diferenciais, algumas das quais produziram os campos de direção ilustrados nas Figuras de 1.1.5 a 1.1.10. Em cada um dos problemas de 15 a 20, identifique a equação diferencial que corresponde ao campo de direções dado.

(a) $y' = 2y - 1$

(b) $y' = 2 + y$

(c) $y' = y - 2$

(d) $y' = y(y + 3)$

(e) $y' = y(y - 3)$

(f) $y' = 1 + 2y$

(g) $y' = -2 - y$

(h) $y' = y(3 - y)$

(i) $y' = 1 - 2y$

(j) $y' = 2 - y$

15. O campo de direções da Figura 1.1.5 abaixo

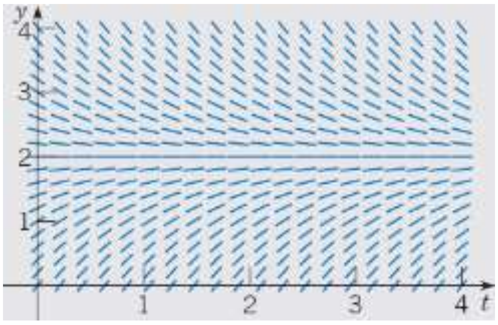

FIGURA 1.1.5 Problema 15.

16. O campo de direções na Figura abaixo

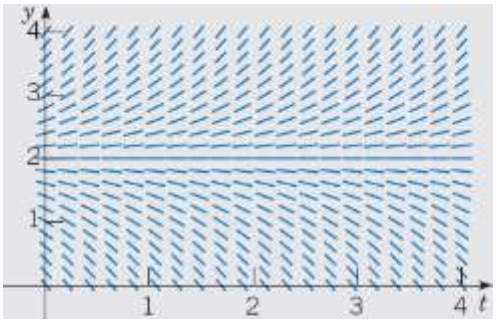

FIGURA 1.1.6 Problema 16.

17. O campo de direções na Figura 1.1.7. abaixo

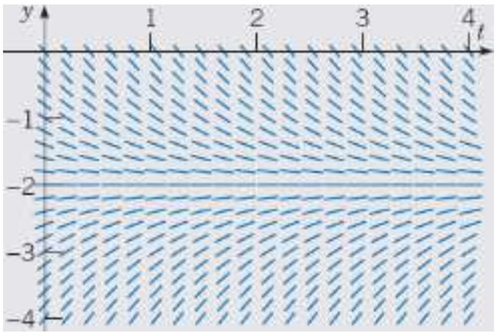

FIGURA 1.1.7 Problema 17.

18. O campo de direções na Figura 1.1.8.

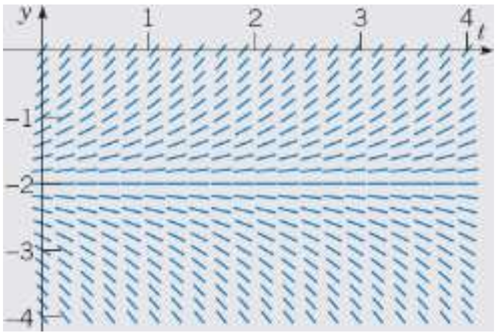

FIGURA 1.1.8 Problema 18.

19. O campo de direções na Figura 1.1.9. abaixo

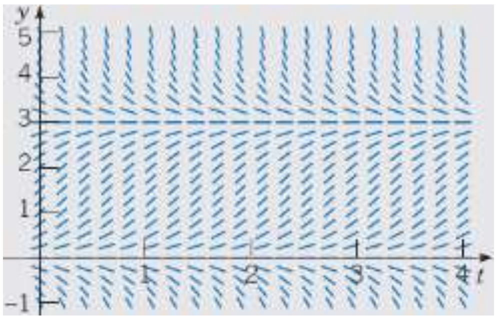

FIGURA 1.1.9 Problema 19.

20. O campo de direções na Figura 1.1.10. abaixo

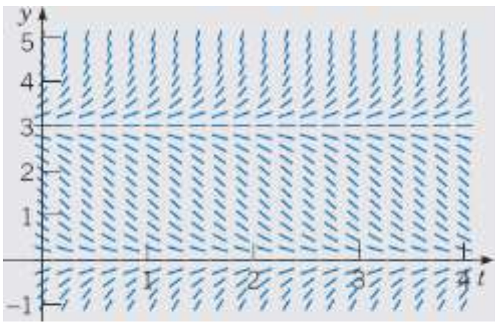

FIGURA 1.1.10 Problema 20.

21. Um pequeno lago contém, inicialmente, 1.000.000 de galões (aproximadamente 4.550.000 litros) de água e uma quantidade desconhecida de um produto químico indesejável. O lago recebe água contendo 0,01 grama dessa substância por galão a uma taxa de 300 galões por hora. A mistura sai à mesma taxa, de modo que a quantidade de água no lago permanece constante. Suponha que o produto químico está distribuído uniformemente no lago.

(a) Escreva uma equação diferencial para a quantidade de produto químico no lago em um instante qualquer.

(b) Qual a quantidade do produto químico que estará no lago após um período muito longo de tempo?

Essa quantidade limite depende da quantidade presente inicialmente?

22. Uma gota de chuva esférica evapora a uma taxa proporcional à sua área de superfície. Escreva uma equação diferencial para o volume de uma gota de chuva em função do tempo.

23. A lei do resfriamento de Newton diz que a temperatura de um objeto varia a uma taxa proporcional à diferença entre a temperatura do objeto e a de seu meio ambiente (na maioria dos casos, a temperatura do ar ambiente). Suponha que a temperatura ambiente é de 70°F (cerca de 20°C) e que a taxa constante é 0,05 $(\text{min})^{-1}$. Escreva uma equação diferencial para a temperatura do objeto em qualquer instante de tempo. Note que a equação diferencial é a mesma, independente se a temperatura do objeto está acima ou abaixo da temperatura ambiente.

24. Determinado remédio está sendo injetado na veia de um paciente hospitalizado. O líquido, contendo 5 mg/cm^3 do remédio, entra na corrente sanguínea do paciente a uma taxa de 100 cm^3/h. O remédio é absorvido pelos tecidos do corpo a uma taxa proporcional à quantidade presente, com um coeficiente de proporcionalidade igual a 0,4 $(h)^{-1}$.

(a) Supondo que o remédio está sempre distribuído uniformemente na corrente sanguínea, escreva uma equação diferencial para a quantidade de remédio presente na corrente sanguínea em qualquer instante de tempo.

(b) Quanto do remédio continua presente na corrente sanguínea após muito tempo?

25. Para objetos pequenos, caindo devagar, a hipótese feita na aula sobre a resistência do ar ser proporcional à velocidade é boa. Para objetos maiores, caindo mais rapidamente, uma hipótese mais precisa é de que a resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade

(a) Escreva uma equação diferencial para a velocidade de um objeto de massa m em queda, supondo que a magnitude da força de resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade e que o sentido dessa força é oposto ao da velocidade.

(b) Determine a velocidade limite após um longo período de tempo.

(c) Se m = 10 kg, encontre o coeficiente de resistência do ar de modo que a velocidade limite seja 49 m/s.

Em cada um dos problemas de 26 a 33, desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Baseado no campo de direções, determine o comportamento de y quando $t \to \infty$. Se esse comportamento depender do valor inicial de y em t = 0, descreva essa dependência. Note que a expressão à direita do sinal de igualdade nessas equações depende de t, além de y; portanto, suas soluções podem exibir um comportamento mais complicado do que as da aula.

26. $y' = -2 + t - y$

27. $y' = te - 2t - 2y$

28. $y' = e-t + y$

29. $y' = t + 2y$

30. $y' = 3 \text{ sen } t + 1 + y$

31. $y' = 2t - 1 - y2$

32. $y' = -(2t + y)/2y$

33. $y' = \frac{1}{6}y^3 - y - \frac{1}{3}t^2$

RESPOSTAS

1.y $\to$ 3/2 quando t $\to \infty$.

2.y se afasta de 3/2 quando t $\to \infty$.

3.y se afasta de −3/2 quando t $\to \infty$.

4.y $\to$ −1/2 quando t $\to \infty$.

5.y se afasta de −1/2 quando t $\to \infty$.

6.y se afasta de −2 quando t $\to \infty$.

7.$y' = 3 - y$

8.$y' = 2 - 3y$

9.$y' = y - 2$

10.$y' = 3y - 1$

11.y = 0 e y = 4 são soluções de equilíbrio; y $\to$ 4 se o valor inicial for positivo; y se afastará de 0 se o valor inicial for negativo.

12.y = 0 e y = 5 são soluções de equilíbrio; y se afastará de 5 se o valor inicial for maior do que 5; y $\to$ 0 se o valor inicial for menor do que 5.

13.y = 0 é solução de equilíbrio; y $\to$ 0 se o valor inicial for negativo; y se afastará de 0 se o valor inicial for positivo.

14.y = 0 e y = 2 são soluções de equilíbrio; y se afastará de 0 se o valor inicial for negativo; y $\to$ 2 se o valor inicial estiver entre 0 e 2; y se afastará de 2 se o valor inicial for maior do que 2.

15.(j)

16.(c)

17.(g)

18.(b)

19.(h)

20.(e)

21.(a) $dq/dt = 300(10^{-2} - q10^{-6})$; q em g, t em h

(b)q $\to 10^4$ g; não

22.$dV/dt = -kV^{2/3}$ para algum $k > 0$.

23.$du/dt = -0{,}05(u - 70)$; u em ºF, t em minutos

24.(a) $dq/dt = 500 - 0{,}4q$; q em mg, t em h

(b)$q \rightarrow 1250$ mg

25.(a) $m\upsilon' = mg - k\upsilon^2$

(b) $\upsilon \rightarrow \sqrt{\frac{mg}{k}}$

(c)$k = 2/49$

26.y é assintótico a $t - 3$ quando $t \rightarrow \infty$.

27.$y \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

28.$y \rightarrow \infty$, 0 ou $-\infty$, dependendo do valor inicial de y.

29.$y \rightarrow \infty$ ou $-\infty$, dependendo do valor inicial de y.

30.$y \rightarrow \infty$ ou $-\infty$ ou y oscila, dependendo do valor inicial de y.

31.$y \rightarrow -\infty$ ou é assintótico a $\sqrt{2t-1}$, dependendo do valor inicial de y.

32.$y \rightarrow 0$ e então deixa de existir depois de algum instante $t_f \geq 0$.

33.$y \rightarrow \infty$ ou $-\infty$, dependendo do valor inicial de y.