EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA TE 315

Aula 01_1

INTRODUÇÃO

Equações Diferenciais

- **Equações diferenciais** são equações contendo **derivadas**

A seguir, **exemplos** de fenômenos físicos descritos envolvendo equações diferenciais:

- Movimento de fluidos
- Movimento de sistemas mecânicos
- Fluxo de corrente em circuitos elétricos
- Dissipação de calor em objetos sólidos
- Dinâmica sísmica

Uma equação diferencial que descreve um processo físico é chamada de **modelo matemático.**

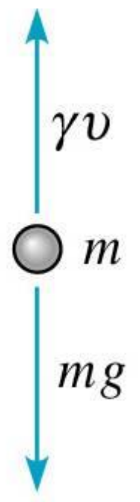
Modelos Matemáticos Básicos

Exemplo 1: Queda Livre

- Formular uma **equação diferencial** descrevendo o movimento de um **objeto caindo** na atmosfera perto do nível do mar.

Variáveis: tempo t e velocidade v

Lei Física: Segunda Lei de Newton F = ma = m (dv/dt)



Força de gravidade: F = mg

Força de resistência do ar: F = γv

Então:

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v}$$

Modelo matemático

Modelos Matemáticos Básicos

Exemplo 1: Queda Livre

Suponha uma pedra de granizo de massa m=0,025 kg e coeficiente de arrasto γ =0,007 kg/s. Tomando g = 9,8 m/s^2, a equação diferencial para a queda da pedra é:

$$0{,}025\,\frac{dv}{dt} = (0{,}025)(9{,}8) - 0{,}007\,v$$

$$\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - 0{,}28\,v$$

$$v' + \ 0{,}28\,v = 9{,}8$$

$$v' + \ 0{,}28\,v - 9{,}8 = 0$$

Vamos **analisar** esta equação geometricamente (sem resolver ela)...

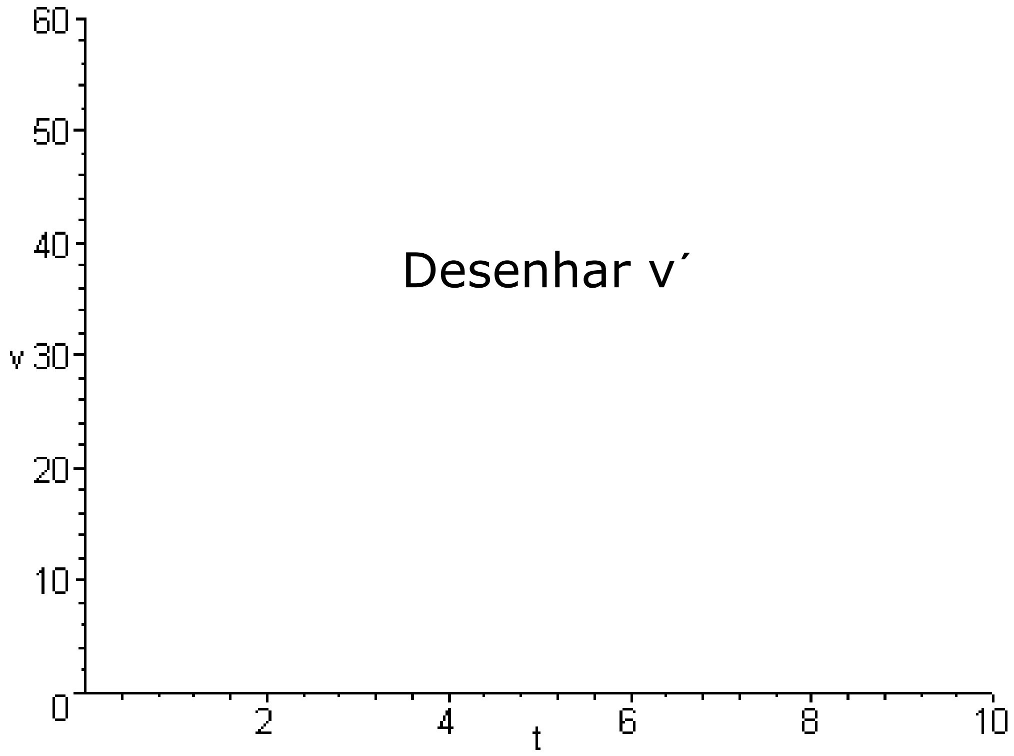
Modelos Matemáticos Básicos

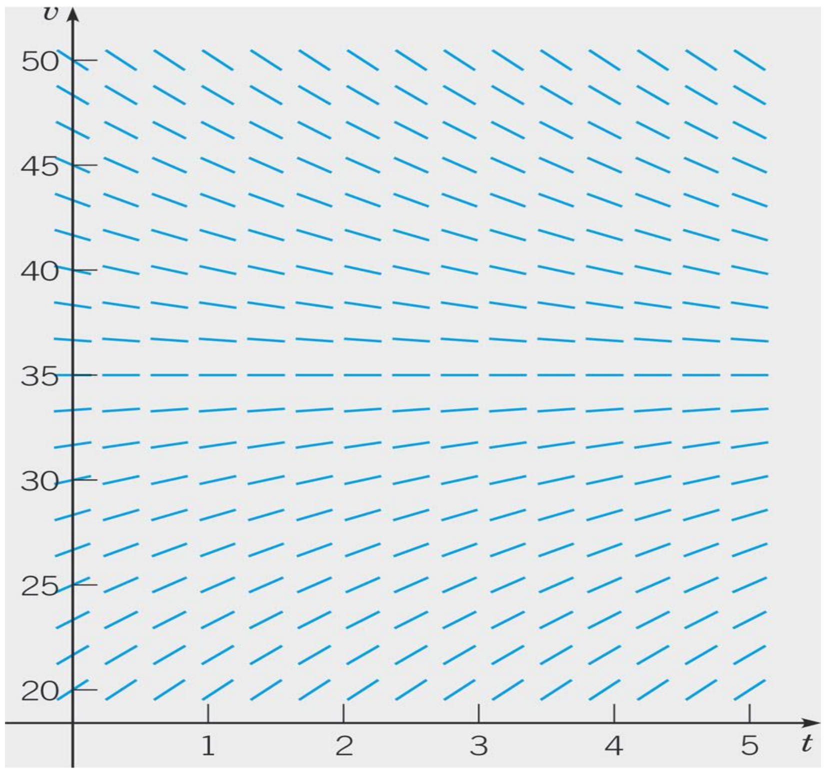
Exemplo 1: Queda Livre

Para cada valor de v podemos encontrar o valor de v´ utilizando $\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - 0{,}28\,v$

Se v = 40 então v´=-1,4 (para todo v=40, v´ será sempre -1,4)

v	v'
0	9.8
5	8.4
10	7
15	5.6
20	4.2
25	2.8
30	1.4
35	0
40	-1.4
45	-2.8
50	-4.2
55	-5.6
60	-7





Modelos Matemáticos Básicos

Exemplo 1: Queda Livre

Para cada valor de v podemos encontrar o valor de v´ utilizando $\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - 0{,}28\,v$

Se v = 40 então v´=-1,4 (para todo v=40, v´ será sempre -1,4)

v	v'
0	9.8
5	8.4
10	7
15	5.6
20	4.2
25	2.8
30	1.4
35	0
40	-1.4
45	-2.8
50	-4.2
55	-5.6
60	-7

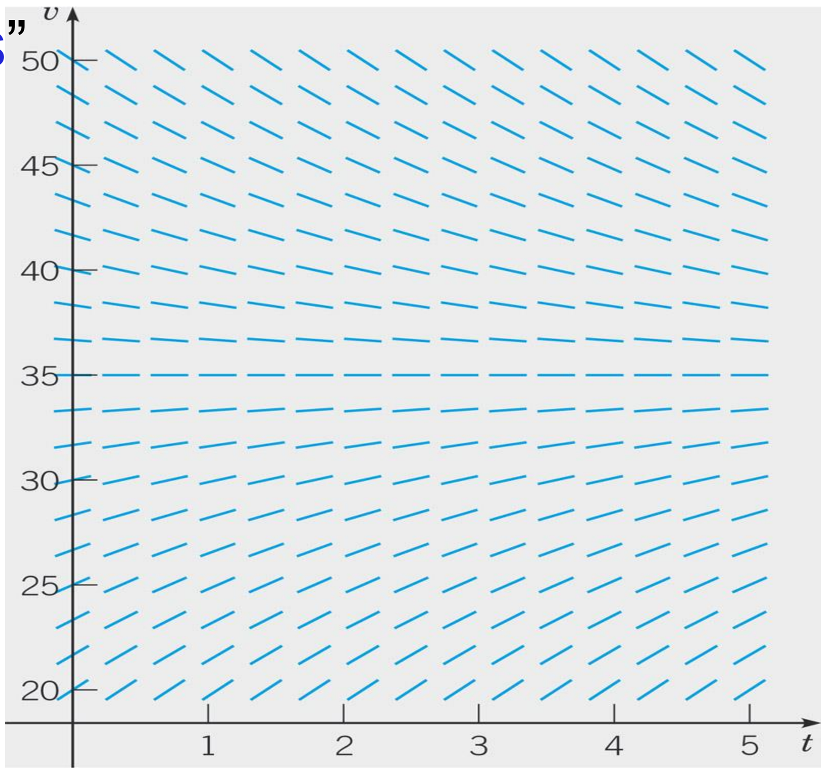
Esse gráfico se chama "campo de direções"

Veja que v´ não depende de t

Utilizando o Maple:

- `with(DEtools):`
- `DEplot(diff(v(t),t)=9.8-0.28 v(t),v(t), t=0..10,v=0..80,stepsize=.1,color=blue);`

O que significa este gráfico?



Modelos Matemáticos Básicos

Exemplo 1: Queda Livre

As linhas são **tangentes** às curvas solução da equação (evidentemente, pois v(t) é a solução e v´(t) é a derivada de v(t)).

Desta forma vemos onde a solução aumenta ou diminui e por quanto.

O que significam as curvas horizontais em v=35 ?

São as **soluções estacionárias** (não dependem de t)

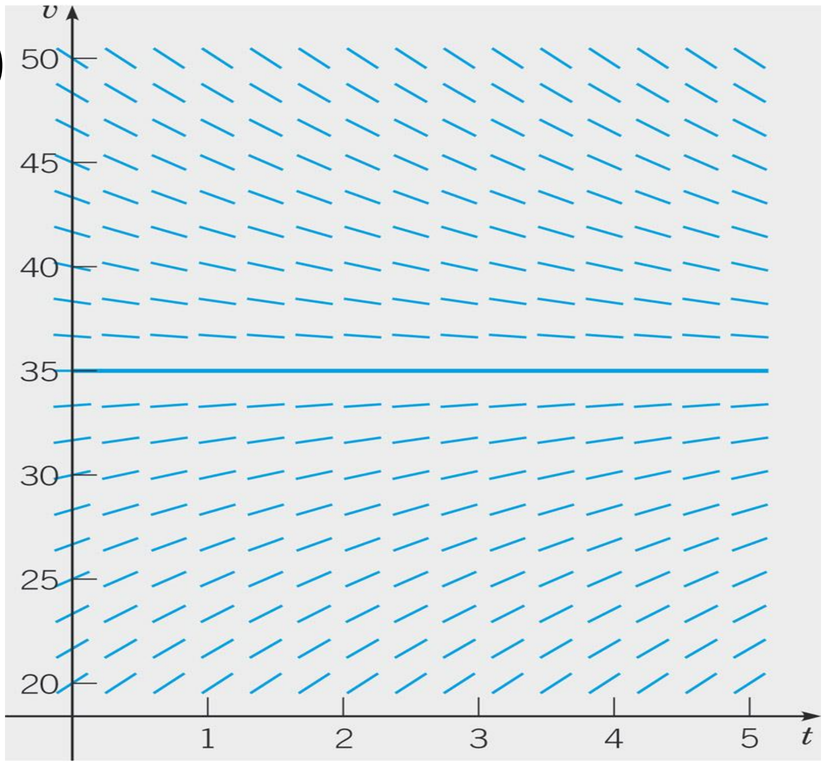
Vamos utilizar a figura para encontrar a solução estacionaria e a seguir vamos determinar ela analiticamente:

Graficamente: v = 35

Analiticamente: colocamos v´=0 e teremos:

$9{,}8 - 0{,}28\,v = 0$ de onde v = 9,8/0,28 = 35

O que significa fisicamente esta solução?



Modelos Matemáticos Básicos

Exemplo 2: Ratos e Corujas

Considere uma população de ratos que se reproduz numa taxa proporcional a sua população atual (supondo que não haja corujas presentes). Vamos representar a população de camundongos por *p(t)*, e *r* vai representar sua taxa de crescimento.

Matematicamente o enunciado significa que:

$$\frac{dp}{dt} = rp$$

Então, quando as corujas estão presentes, elas comem os ratos.

Se a taxa de predação é uma constante, k, teremos que:

$$\frac{dp}{dt} = rp - k$$

Modelos Matemáticos Básicos

Exemplo 2: Ratos e Corujas

Vamos utilizar esta equação $\frac{dp}{dt} = rp - k$ no caso em que a taxa de reprodução é r = 0,5 ratos/mês (sem as corujas presentes)

Vamos supor que quando temos as corujas elas comem 15 ratos por dia.

Escreva a equação diferencial que descreve a população de ratos em função do tempo na presença de corujas (consideramos 30 dias no mês).

$$\frac{dp}{dt} = 0{,}5p - 450$$

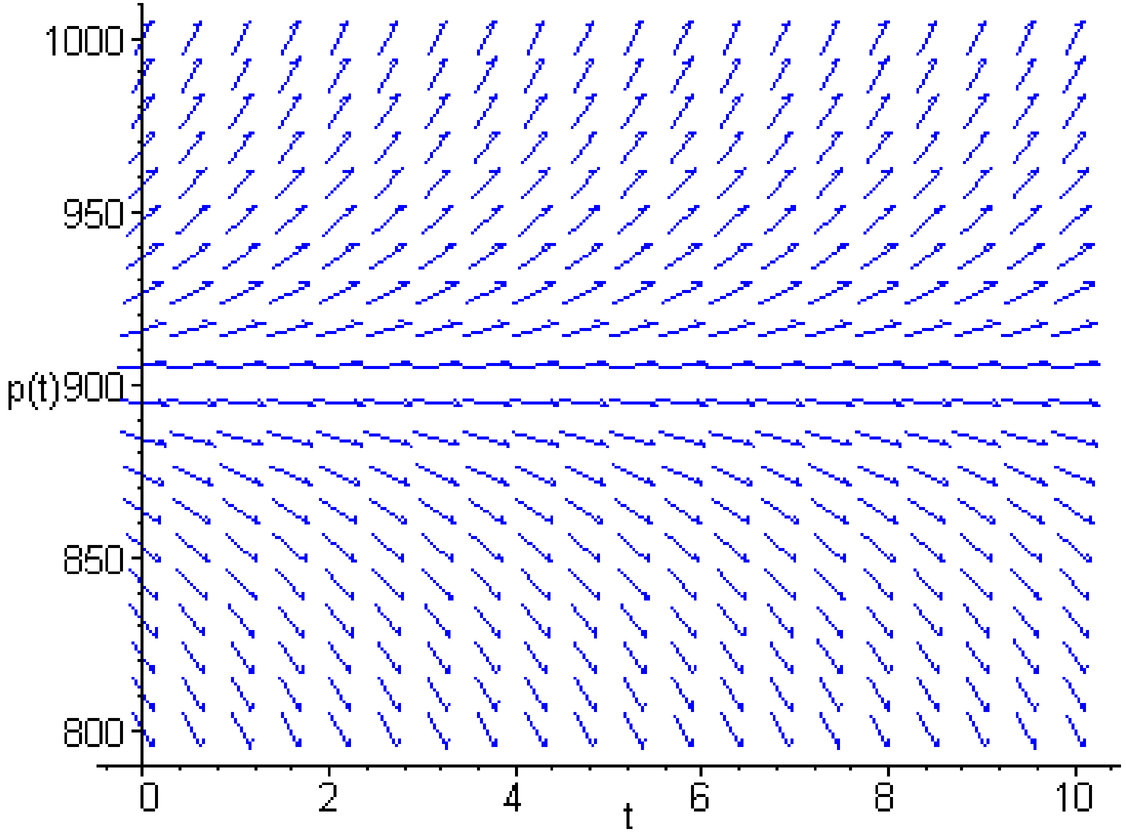
Como nossa unidade temporal é o mês utilizamos 450 no lugar de 15 para indicar a perda de ratos no lado direito da equação.

Modelos Matemáticos Básicos

Exemplo 2: Ratos e Corujas

Qual é a solução estacionária desta equação? $p' = 0{,}5p - 450$

Que podem dizer deste comportamento? (analisem a equação e o comportamento das soluções)



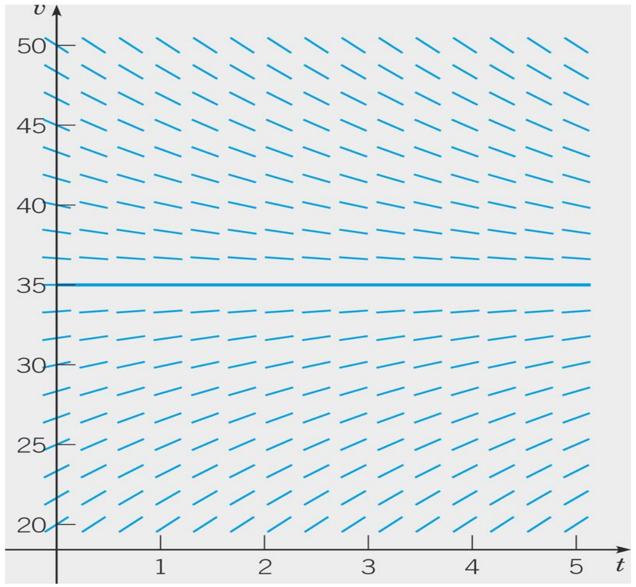
Modelos Matemáticos Básicos

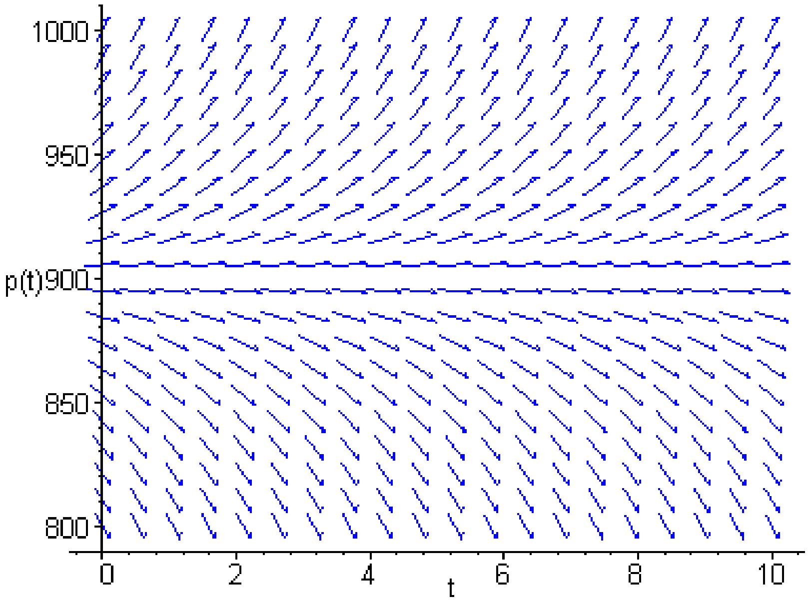
Análise dos exemplos 1 e 2

Em ambos os exemplos temos soluções de equilíbrio que separam as soluções crescentes das decrescentes.

Num exemplo as soluções convergem para o equilíbrio, no outro divergem.

As soluções de equilíbrio são fundamentais para a compreensão da equação diferencial estudada





Modelos Matemáticos Básicos

Exemplo 3: Aquecimento e resfriamento

Imagine um prédio isolado termicamente de forma parcial

A temperatura interna do prédio depende da própria temperatura interna existente no momento, ou seja depende de u(t) e da temperatura externa T(t)

A lei física aplicável é a lei de Newton do resfriamento que diz que as variações de temperatura internas são proporcionais á diferença de temperatura u(t)-T(t) ou seja, matematicamente falando:

$$\frac{du}{dt} = -k(u - T)$$

O porque dos sinais:

Como a constante de proporcionalidade k>0 se u>T implica que $\frac{du}{dt}$ <0

Vamos supor que k = 1,5 e T(t)=60+15 sem (2πt)

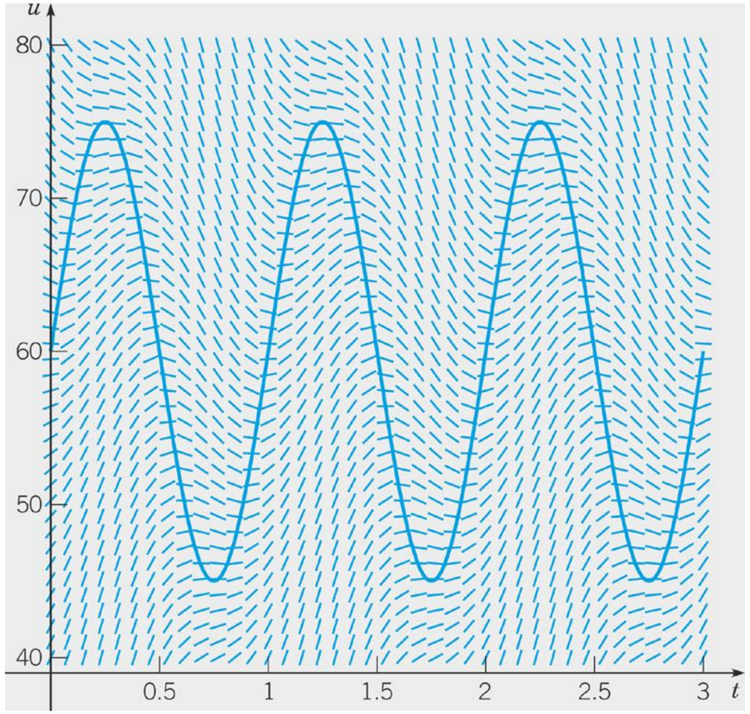
Modelos Matemáticos Básicos

Exemplo 3: Aquecimento e resfriamento

Neste caso teríamos:

$$\frac{du}{dt} = -1{,}5(u - 60 - 15(2\pi t))$$

O campo de direções é:



A linha contínua é a temperatura externa

Veja a defasagem entre a temperatura interna e a externa para qualquer temperatura inicial escolhida

Modelos Matemáticos Básicos

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço