Soluções para os exercícios selecionados

Conjunto de problemas 1.2

3. As retas intersectam-se em $(x, y) = (3, 1)$. Então, 3 (coluna 1) + 1 (coluna 2) = (4, 4).

4. Os dois pontos no plano são (1, 0, 0, 0) e (0, 1, 0, 0).

5. Esses "planos" intersectam-se em um espaço tetradimensional. O quarto plano normalmente intersecta essa reta em um ponto. Uma equação inconsistente, como $u + w = 5$, não resulta em solução alguma (nenhuma interseção).

6. Tanto $a = 2$ quanto $a = -2$ fornecem uma linha de soluções. Todos os outros *a*s fornecem $x = 0, y = 0$.

10. Solúvel para (3, 5, 8) e (1, 2, 3); não solúvel para $b = (3, 5, 7)$ ou $b = (1, 2, 2)$.

11. Coluna 3 = 2 (coluna 2) – coluna 1. Se $b = (0, 0, 0)$, então $(u, v, w) = (c, -2c, c)$.

14. A interpretação por linhas mostra quatro *retas*. A interpretação por colunas está em um espaço *tetra*dimensional. Nenhuma solução, exceto o lado direito, é uma combinação *das duas colunas*.

15. A interpretação por linhas tem duas retas que se encontram em (4, 2). A interpretação por colunas tem $4(1, 1) + 2(-2, 1) = 4(\text{coluna } 1) + 2(\text{coluna } 2) =$ lado direito (0, 6).

17. Coluna 3 = coluna 1; soluções $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ ou $(0, 1, 1)$ e você pode somar qualquer múltiplo de $(-1, 0, 1)$; $b = (4, 6, c)$ precisa de $c = 10$ para solubilidade.

18. $u = 0, v = 0, w = 1$, porque 1 (coluna 3) = b.

20. O segundo plano, a linha 2 da matriz e todas as colunas da matriz serão alterados. A solução não é alterada.

22. Se x, y, z satisfazem as primeiras duas equações, também satisfazem a terceira equação. A linha **L** das soluções contém $v = (1, 1, 0)$, $w = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$, e $u = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w$, e todas as combinações $cv + dw$ com $c + d = 1$.

Conjunto de problemas 1.3

1. $6x + 4y$ é 2 vezes $3x + 2y$. Não há nenhuma solução, a menos que o lado direito seja $2 \cdot 10 = 20$. Então, todos os pontos na reta $3x + 2y = 10$ serão soluções, incluindo (0, 5) e (4, –1).

2. Subtraia $-\frac{1}{2}$ vezes a equação 1 (ou some $\frac{1}{2}$ vezes a equação 1). A nova segunda equação é $3y = 3$. Então, $y = 1$ e $x = 5$. Se o lado direito muda de sinal, a solução também muda: $(x, y) = (-5, -1)$.

4. Multiplique por $\ell = \frac{10}{2} = 5$ e subtraia para encontrar $2x + 3y = 1$ e $-6y = 6$. Pivôs 2, –6.

7. $6x - 4y$ é 2 vezes $(3x - 2y)$. Portanto, precisamos de $b_2 = 2b_1$. Então, haverá infinitamente muitas soluções. As colunas (3, 6) e (–2, –4) estão na mesma linha.

8. Se $a = 2$, a eliminação deve falhar. As equações não têm solução. Se $a = 0$, a eliminação é interrompida para uma troca de linhas. Então $3y = -3$ fornece $y = -1$ e $4x + 6y = 6$ resulta em $x = 3$.

10. A segunda posição de pivô conterá $-2 - b$. Se $b = -2$, trocamos com a linha 3. Se $b = -1$ (caso singular), a segunda equação é $-y - z = 0$. Uma solução é $(1, 1, -1)$.

13. $\begin{aligned} 2x - 3y &= 3 \\ y + z &= 1 \\ 2y - 3z &= 2 \end{aligned}$ fornece $\begin{aligned} 2x - 3y &= 3 \\ y + z &= 1 \\ -5z &= 0 \end{aligned}$ e $\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned}$ Subtraia 2 × linha 1 da linha 2 / Subtraia 1 × linha 1 da linha 3 / Subtraia 2 × linha 2 da linha 3.

14. A linha 2 torna-se $3y - 4z = 5$, então a linha 3 torna-se $(q + 4)z = t - 5$. Se $q = -4$, o sistema é singular – sem terceiro pivô. Então, se $t = 5$, a terceira equação é $0 = 0$. Escolhendo $z = 1$, a equação $3y - 4z = 5$ fornece $y = 3$ e a equação 1 fornece $x = -9$.

16. Se a linha 1 = linha 2, então a linha 2 é nula após o primeiro passo; troque a linha nula com a linha 3 e não haverá *terceiro* pivô. Se a coluna 1 = coluna 2, há um *segundo* pivô.

18. O sistema é singular se a linha 3 for uma *combinação de linhas* 1 e 2. A partir da vista posterior, os três planos formam um triângulo. Isto acontece se as linhas 1 + 2 = linha 3 à esquerda, mas não à direita: por exemplo, $x + y + z = 0$, $x - 2y - z = 1$, $2x - y = 9$. Não há dois planos paralelos, ainda assim não há nenhuma solução.

20. O quinto pivô é $\frac{6}{5}$. O n-ésimo pivô é $\frac{(n+1)}{n}$.

24. $a = 0$ exige uma troca de linhas, mas o sistema é não singular: $a = 2$ torna-o singular (um pivô, infinidade de soluções); $a = -2$ torna-o singular (um pivô, sem solução).

27. Sistema triangular $\left\{\begin{aligned} u + v + w &= 2 \\ 2v + 2w &= -2 \\ 2w &= 2 \end{aligned}\right.$ Solução $\begin{aligned} u &= 3 \\ v &= -2. \\ w &= 1 \end{aligned}$

28. $(u, v, w) = (3/2, 1/2, -3)$. Alterar para $+1$ tornaria o sistema singular (duas colunas iguais).

30. A eliminação falha em $a = 2$ (colunas iguais), $a = 4$ (linhas iguais), $a = 0$ (coluna nula).

31. O segundo termo $bc + ad$ é $(a + b)(c + d) - ac - bd$ (somente uma multiplicação adicional).

Conjunto de problemas 1.4

2. Os produtos escalares 54 e 0, coluna multiplicada por linha resulta em $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -6 & -10 & -2 \\ 21 & 35 & 7 \end{bmatrix}$.

4. Exemplos: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, diagonal, $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, simétrica, $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, triangular, $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ antissimétrica.

5. $\begin{bmatrix} 17 \\ 4 \\ 17 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$. Com laterais para (2, 1) e (0, 3), o paralelogramo vai até (2, 4).

6. $Ax = (0, 0, 0)$, portanto, $x = (2, 1, 1)$ é uma solução; outras soluções são $cx = (2c, c, c)$.

10. $AB_1 = B_1A$ fornece $b = c = 0$. $AB_2 = B_2A$ fornece $a = d$. Então $A = aI$.

13. $A(A+B)+B(A+B)$, $(A+B)(B+A)$, $A^2+AB+BA+B^2$ sempre se iguala a $(A+B)^2$.

14. (a) a_{11} (b) $\ell_{i1}=a_{i1}/a_{11}$ (c) o novo a_{ij} é $a_{ij}-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}$

(d) o segundo pivô $a_{22}-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}$.

15. $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $D=A$, $E=F=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$.

16. Os coeficientes das linhas de B são 2, 1, 4 de A. A primeira linha de AB é $[6 \quad 3]$.

18. $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p & q\\ r & s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ c\end{bmatrix}[p \quad q]+\begin{bmatrix}b\\ d\end{bmatrix}[r \quad s]=\begin{bmatrix}ap+br & aq+bs\\ cp+dr & cq+ds\end{bmatrix}$.

19. $A^n=A$, $B^n=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & (-1)^n\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=$ matriz nula.

22. Alterar a_{33} de 7 para 11 mudará o terceiro pivô de 5 para 9. Alterar a_{33} de 7 para 2 mudará o pivô de 5 para *nenhum pivô*.

23. Para reverter E_{31}, *some* sete vezes a linha 1 à linha 3. A matriz é $R_{31}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 7 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

25. $E_{32}E_{21}b=(1,-5,-35)$, mas $E_{21}E_{32}b=(1,-5,\mathbf{0})$. Então, a linha 3 não sente efeito algum da linha 1.

28. E_{21} tem $\ell_{21}=-\frac{1}{2}$, E_{32} tem $\ell_{32}=-\frac{2}{3}$, E_{43} tem $\ell_{43}=-\frac{3}{4}$. Caso contrário, os Es equivalem a I.

30. $E_{13}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$; $E_{31}E_{13}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$. Teste na matriz identidade!

32. $BA=3I$ é 5 por 5, $AB=5I$ é 3 por 3, $ABD=5D$ é 3 por 1, ABD: Não, $A(B+C)$: Não.

34. (linha 3) $\cdot\, x$ é $\sum a_{3j}x_j$ e $(A^2)_{11}=$ (linha 1) $\cdot$ (coluna 1) $=\sum a_{1j}a_{j1}$.

35. $\begin{aligned}a+b+c&=4\\ a+2b+4c&=8\\ a+3b+9c&=14\end{aligned}$ resulta em $\begin{aligned}a&=2\\ b&=1\\ c&=1\end{aligned}$.

38. (a) Cada coluna é E vezes uma coluna de B.

(b) $EB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 8\end{bmatrix}$.

As linhas de EB são combinações de linhas de B, portanto, são múltiplas de $[1 \quad 2 \quad 4]$.

41. (a) mn (cada elemento). (b) mnp. (c) n^3 (isto é n^2 produtos escalares).

44. (a) $B=4I$. (b) $B=0$. (c) $B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

(d) Cada linha de B é 1, 0, 0.

46. $\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\end{bmatrix}[3 \quad 3 \quad 0]+\begin{bmatrix}0\\ 4\\ 1\end{bmatrix}[1 \quad 2 \quad 1]=\begin{bmatrix}3 & 3 & 0\\ 6 & 6 & 0\\ 6 & 6 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 4 & 8 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 3 & 0\\ 10 & 14 & 4\\ 7 & 8 & 1\end{bmatrix}$.

47. A vezes B é $A\begin{bmatrix} \vert & \vert & \vert & \vert \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \text{——} \\ \text{——} \\ \text{——} \end{bmatrix}B$, $\begin{bmatrix} \text{——} \\ \text{——} \\ \text{——} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vert & \vert & \vert & \vert \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \vert & \vert & \vert & \vert \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{——} \\ \text{——} \\ \text{——} \end{bmatrix}$.

50. $2x + 3y + z + 5t = 8$ é $Ax = b$ com a matriz 1 por 4, $A = [2 \quad 3 \quad 1 \quad 5]$. As soluções x preenchem um "plano" 3D em quatro dimensões.

51. O produto escalar $[1 \quad 4 \quad 5]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$ (1 por 3)(3 por 1) é nulo para os pontos (x, y, z) em um plano $x + 4y + 5z = 0$ em três dimensões. As colunas de A são vetores unidimensionais.

52. O bloco (2, 2) $S = D - CA^{-1}B$ é o **complemento de Schur**: blocos em $d - (cb/a)$.

56. $\begin{bmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{bmatrix}$ está de acordo com $\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{bmatrix}$ quando $b = c$ e $a = d$.

58. A multiplicada por $X = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]$ será a matriz identidade $I = [Ax_1 \quad Ax_2 \quad Ax_3]$.

59. $M = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+u & 5-u+v & 5-v \\ 5-u-v & 5 & 5+u+v \\ 5+v & 5+u-v & 5-u \end{bmatrix}$;

$M_3(1, 1, 1) = (15, 15, 15)$; $M_4(1, 1, 1, 1) = (34, 34, 34, 34)$ porque os números 1 a 16 se somam a 136, que é 4(34).

60. A * v = [3 4 5]′ e v′ * v = 50; v * A dá uma mensagem de erro.

Conjunto de problemas 1.5

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = I$ também.

$(E^{-1}F^{-1}G^{-1})(GFE) = E^{-1}F^{-1}FE = E^{-1}E = I$; também $(GFE)(E^{-1}F^{-1}G^{-1}) = I$.

2. U é não singular quando nenhum valor na diagonal principal for zero.

4. $FGH = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; $HGF = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

5. (a) Não singular quando $d_1d_2d_3 \neq 0$. (b) Suponha que $d_3 \neq 0$: resolva $Lc = b$ no sentido decrescente: $Lc = b$ fornece $c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Então, $\begin{bmatrix} d_1 & -d_1 & 0 \\ 0 & d_2 & -d_2 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ resulta em

$x = \begin{bmatrix} 1/d_3 \\ 1/d_3 \\ 1/d_3 \end{bmatrix}$.

7. $LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; após a eliminação, $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

14. L torna-se $\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}$. MATLAB e outros códigos usam $PA = LU$.

16. $a = 4$ leva a uma troca de linha; $3b + 10a = 40$ leva a uma matriz singular; $c = 0$ leva a uma troca de linha; $c = 3$ leva a uma matriz singular.

17. Permutação linhas 2 e 3 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-3\\4\end{bmatrix}$;

permutação linhas 1 e 2 $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$.

18. $Lc = b$ no sentido decrescente fornece $c = \begin{bmatrix}2\\-2\\0\end{bmatrix}$; $Ux = c$ no sentido crescente fornece $x = \begin{bmatrix}5\\-2\\0\end{bmatrix}$.

19. $PA = LDU$ é $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\2&3&4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$;

$PA = LDU$ é $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

22. 2 por 2: $d = 0$ não é permitido;

$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&2\\1&2&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&&\\ \ell&1&\\ m&n&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d&e&g\\&f&h\\&&i\end{bmatrix}$ $d = 1$, $e = 1$, então $\ell = 1$; $f = 0$ não é permitido; **nenhum pivô na linha 2**.

24. $\ell_{31} = 1$ e $\ell_{32} = 2$ ($\ell_{33} = 1$): passos reversos para recuperar $x + 3y + 6z = 11$ de $Ux = c$: 1 vezes $(x + y + z = 5)$ + 2 vezes $(y + 2z = 2)$ + 1 vezes $(z = 2)$ fornece $x + 3y + 6z = 11$.

25. $\begin{bmatrix}1&&\\0&1&\\0&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\-2&1&\\0&0&1\end{bmatrix} A = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&3\\0&0&-6\end{bmatrix} = U.$

$A = \begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&2&1\end{bmatrix} U = E_{21}^{-1}E_{32}^{-1}U = LU.$

27. $\begin{bmatrix}a&a&a&a\\a&b&b&b\\a&b&c&c\\a&b&c&d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&&&\\1&1&&\\1&1&1&\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&a&a&a\\&b-a&b-a&b-a\\&&c-b&c-b\\&&&d-c\end{bmatrix}$. Precisa de $a \neq 0$, $b \neq a$, $c \neq b$, $d \neq c$.

28. $\begin{bmatrix}1&&\\1&1&\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&1\\&&1\end{bmatrix}=LIU;\ \begin{bmatrix}a&a&0\\a&a+b&b\\0&b&b+c\end{bmatrix}=(\text{mesmo } L)\begin{bmatrix}a&&\\&b&\\&&c\end{bmatrix}(\text{mesmo } U).$

29. $\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}c=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$ fornece $c=\begin{bmatrix}4\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}4\\1\\1\end{bmatrix}$ fornece $x=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}$.

$A=LU.$

32. $A=\begin{bmatrix}2&4&8\\0&3&9\\0&0&7\end{bmatrix}$ tem $L=I$ e $D=\begin{bmatrix}2&&\\&3&\\&&7\end{bmatrix}$; $A=LU$ tem $U=A$ (pivôs na diagonal);

$A=LDU$ tem $U=D^{-1}A=\begin{bmatrix}1&2&4\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$ com os dígitos 1 na diagonal.

35. Cada novo *lado direito* custa apenas n^2 passos comparados aos $n^3/3$ passos necessários para a eliminação total $A\backslash b$.

36. $\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&3&4&5\\1&3&6&10&15\\1&4&10&20&35\\1&5&15&35&70\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1&&&&\\1&1&&&\\1&2&1&&\\1&3&3&1&\\1&4&6&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\&1&2&3&4\\&&1&3&6\\&&&1&4\\&&&&1\end{bmatrix}.$ *Triângulo de Pascal em L* e *U*. O código lu do MATLAB romperá o padrão. O chol não faz nenhuma alteração de linhas para matrizes simétricas com pivôs positivos.

39. A submatriz B superior 2 por 2 tem os primeiros dois pivôs 2, 7. Razão: eliminação em A começa no canto superior esquerdo com a eliminação em B.

40. $P=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix};\ P_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ e $P_2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

(P_2 fornece uma troca de coluna).

44. 2 muda; 3 muda; 50 muda e, a seguir, 51 muda.

46. A solução é $x=(1, 1, \ldots, 1)$. Então, $x=Px$.

48. Há $n!$ matrizes de permutação de ordem n. Por fim, duas forças de P *devem ser as mesmas*: se $P^r=P^s$, então $P^{r-s}=I$. Certamente $r-s\le n!$

$$P=\begin{bmatrix}P_2&\\&P_3\end{bmatrix}\text{ é 5 por 5, com } P_2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\ P_3=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\text{ e } P^6=I.$$

Conjunto de problemas 1.6

1. Se a linha 3 de A^{-1} fosse (a, b, c, d), então $A^{-1}A=I$ resultaria em $2a=0$, $a+3b=0$, $4a+8b=1$. Isto não tem solução.

2. $A(AB) = $ (mova os parênteses) $= (A^2)(B) = I$.

3. $\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ todas têm $A^2 = I$.

8. $A^{-1} = BC^{-1}$; $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}P$.

9. $A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$; $A_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$; $A_3^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

12. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b/a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d-(b^2/a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = LDL^{\mathrm{T}}.$$

16. $A^{\mathrm{T}}B = 8$; $B^{\mathrm{T}}A = 8$; $AB^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; $BA^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$.

17. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; $(B^{-1} + A^{-1})^{-1} = B(A+B)^{-1}A$.

18. (a) elementos $n(n+1)/2$ em e sobre a diagonal. (b) elementos $(n-1)n/2$ sobre a diagonal.

20. (a) A inversa de uma matriz triangular inferior (superior) ainda é uma triangular inferior (superior). Multiplicar as matrizes triangulares inferiores (superiores) fornece uma matriz triangular inferior (superior). (b) As principais diagonais de $L_1^{-1} L_2 D_2$ e $D_1 U_1 U_2^{-1}$ são as mesmas que as de D_2 e D_1, respectivamente. $L_1^{-1} L_2 D_2 = D_1 U_1 U_2^{-1}$, então temos $D_1 = D_2$. Ao comparar os elementos fora das diagonais de $L_1^{-1} L_2 D_2 = D_1 U_1 U_2^{-1}$, as duas matrizes devem ser diagonais. $L_1^{-1} L_2 D_2 = D_2$, $D_1 U_1 U_2^{-1} = D_1$, D_1 é invertível, portanto, $L_1^{-1} L_2 = I$, $U_1 U_2^{-1} = I$. Então, $L_1 = L_2$, $U_1 = U_2$.

21. (a) Em $Ax = (1, 0, 0)$, equação 1 + equação 2 − equação 3 é $0 = 1$. (b) Os lados à direita devem satisfazer $b_1 + b_2 = b_3$. (c) A linha 3 torna-se uma linha de zeros – sem terceiro pivô.

22. Se B altera as linhas 1 e 2 de A, então B^{-1} altera as *colunas* 1 e 2 de A^{-1}.

23. $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ -1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = E$;

então $\begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é $L = E^{-1}$, após reverter a ordem dessas três matrizes elementares e alterar -1 para $+1$.

24. De $B(I - AB) = (I - BA)B$, obtemos $(I - BA)^{-1} = B(I - AB)^{-1}B^{-1}$, uma inversa explícita, contanto que B e $I - AB$ sejam invertíveis. *Segunda abordagem*: se $I - BA$ não for invertível, então $BAx = x$ para alguns x não nulos. Portanto, $ABAx = Ax$, ou $ABy = y$, e $I - AB$ não poderiam ser invertíveis. (Observe que $y = Ax$ é não nulo, a partir de $BAx = x$.)

29. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} t \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}2 \\ 0{,}1 \end{bmatrix}$, portanto, $A^{-1} = \dfrac{1}{10} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

32. Se A tem uma coluna de zeros, BA também tem. Portanto, $BA = I$ é impossível. Não existe A^{-1}.

34. A * ones (4, 1) fornece o vetor nulo, então A não pode ser invertível.

35. $$\begin{bmatrix} 1 & a & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

36. $$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A^{-1} \end{bmatrix}.$$

38. $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A^{-1} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A^{-1} \end{bmatrix}.$$

42. Não invertível para $c = 7$ (colunas iguais), $c = 2$ (linhas iguais), $c = 0$ (coluna nula).

44. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. A^{-1} 5 por 5 também apresenta valores 1 na diagonal e na superdiagonal.

46. Para $Ax = b$ com A = ones (4, 4) = matriz singular e b = ones (4, 1), A\b selecionará $x = (1, 0, 0, 0)$ e a pinv(A) * b selecionará a solução mais curta $x = (1, 1, 1, 1)/4$.

48. $\begin{bmatrix} I & 0 \\ -C & I \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$, e $\begin{bmatrix} -D & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$.

49. $((AB)^{-1})^{\mathrm{T}} = (B^{-1}A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{-1})\mathrm{T}(B^{-1})^{\mathrm{T}}$; $(U^{-1})^{\mathrm{T}}$ é uma triangular *inferior*.

50. $A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1/3 \end{bmatrix}$, $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$; $A^{\mathrm{T}} = A$ e, então,

$$A^{-1} = \frac{1}{c^2}\begin{bmatrix} 0 & c \\ c & -1 \end{bmatrix} = (A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

53. $(Px)^{\mathrm{T}}(Py) = x^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}Py = x^{\mathrm{T}}y$ porque $P^{\mathrm{T}}P = I$; normalmente $Px \cdot y = x \cdot P^{\mathrm{T}}y \neq x \cdot Py$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

54. (a) $x^{\mathrm{T}}Ay = a_{22} = 5$. (b) $x^{\mathrm{T}}A = [4 \quad 5 \quad 6]$. (c) $Ay = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

59. PAP^{T} recupera a simetria.

60. (a) A transposta de $R^{\mathrm{T}}AR$ é $R^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}R^{\mathrm{TT}} = R^{\mathrm{T}}AR = n$ por n.

(b) $(R^{\mathrm{T}}R)_{jj}$ = (coluna j de R) $\cdot$ (coluna j de R) = comprimento quadrado da coluna j.

62. As correntes totais são $A^{\mathrm{T}}y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{BC} \\ y_{CS} \\ y_{BS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{BC} + y_{BS} \\ -y_{BC} + y_{CS} \\ -y_{CS} - y_{BS} \end{bmatrix}$.

De qualquer modo, $(Ax)^{\mathrm{T}}y = x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}y) = x_B y_{BC} + x_B y_{BS} - x_C y_{BC} + x_C y_{CS} - x_S y_{CS} - x_S y_{BS}$.

63. Reordenar as linhas e/ou colunas de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ moverá o elemento a, sem fornecer $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

64. Matrizes aleatórias são quase certamente invertíveis.

65. A matriz $-1, 2, -1$ na seção 1.7 tem $A = LDL^{\mathrm{T}}$ com $\ell_{i,i-1} = 1 - \frac{1}{i}$.

66. Estes são os grupos: triangular inferior com números 1 diagonais, D diagonal invertível e P de permutações. Mais duas: permutações pares, todas as matrizes não singulares.

70. $Ax \cdot y$ é o *custo* de dados inseridos, ao passo que $x \cdot A^{\mathrm{T}}y$ é o *valor* dos resultados.

Conjunto de problemas 1.7

2. $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & -\frac{2}{3} & 1 & \\ & & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & \frac{3}{2} & & \\ & & \frac{4}{3} & \\ & & & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{2}{3} & \\ & & 1 & -\frac{3}{4} \\ & & & 1 \end{bmatrix} = LDL^{\mathrm{T}} \ \det = 5.$$

3. $(u_1, u_2, u_3) = (\pi^2/8, 0, -\pi^2/8)$ em vez dos verdadeiros valores $(1, 0, -1)$.

4. $A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Cada linha se soma a 1, então $A_0 \begin{bmatrix} c \\ c \\ c \\ c \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

7. A matriz de Hilbert 10 por 10 é muito mal condicionada.

8. $H^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$.

10. Um pivô grande é multiplicado por menos que 1 na eliminação de cada elemento abaixo disso. Um caso extremo, com multiplicadores $= 1$ e pivôs $= \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4$, é $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Conjunto de problemas 2.1

1. (a) O conjunto de todos (u, v), em que u e v são as razões p/q dos números inteiros.

(b) O conjunto de todos os (u, v), em que $u = 0$ ou $v = 0$.

4. (b), (d), (e) são subespaços. Não podem se multiplicar por -1 em (a) e (c). Não podem se somar em (f).

5. $\boldsymbol{C}(A)$ é o eixo x; $\boldsymbol{N}(A)$ é a linha através de $(1, 1)$; $\boldsymbol{C}(B)$ é $\mathbf{R}^2$; $\boldsymbol{N}(B)$ é a linha através de $(-2, 1, 0)$; $\boldsymbol{C}(C)$ é o ponto $(0, 0)$ em $\mathbf{R}^2$; o espaço nulo $\boldsymbol{N}(C)$ é $\mathbf{R}^3$.

6. Regras corrompidas: (a) 7, 8; (b) 1; (c) 1, 2, 8.

9. (a) Uma possibilidade: as matrizes cA formam um subespaço que não contém B.
(b) Sim: o subespaço deve conter $A - B = I$.
(c) O subespaço de matrizes cuja diagonal principal é composta somente de zeros.

10. A soma de duas matrizes não singulares pode ser singular ($A + (-A)$). A soma de duas matrizes singulares pode ser não singular.

14. (a) Os subespaços de $\mathbf{R}^2$ são os próprios $\mathbf{R}^2$, linhas através de (0, 0), e o ponto (0, 0).
(b) Os subespaços de $\mathbf{R}^4$ são os próprios $\mathbf{R}^4$, planos tridimensionais $n \cdot v = 0$, subespaços bidimensionais ($n_1 \cdot v = 0$ e $n_2 \cdot v = 0$), linhas unidimensionais através de (0, 0, 0, 0) e (0, 0, 0, 0) isoladamente.

16. Se $(f + g)(x)$ é a $f(g(x))$ comum, então $(g + f)x$ é $g(f(x))$, que é diferente. Na regra 2, ambos os lados são $f(g(h(x)))$. A regra 4 é corrompida, porque não deve haver nenhuma função inversa $f^{-1}(x)$ de modo que $f(f^{-1}(x)) = x$. Se a função inversa existir, será o vetor $-f$.

17. A soma de (4, 0, 0) e (0, 4, 0) não está no plano; ela tem $x + y - 2z = 8$.

20. O menor subespaço contendo **P** e **L** é **P** ou $\mathbf{R}^3$.

21. Uma combinação de colunas de C também é uma combinação de colunas de A (mesmo espaço-coluna; B tem um espaço-coluna diferente).

22. A coluna extra b aumenta o espaço-coluna, a menos que b já *esteja nesse* espaço:

$$[\,A \quad b\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{(espaço-coluna maior)} \\ \text{(nenhuma solução para } Ax = b\text{).} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (b \text{ já no espaço-coluna}) \\ (Ax = b \text{ tem uma solução).} \end{matrix}$$

23. Espaço-coluna $= \mathbf{R}^8$. Cada b é uma combinação de colunas, desde que $Ax = b$ seja solúvel.

26. O espaço-coluna de A é o eixo $x =$ todos os vetores $(x, 0, 0)$. O espaço-coluna de B é o plano x-$y =$ todos os vetores $(x, y, 0)$. O espaço-coluna C é a linha de vetores $(x, 2x, 0)$.

29. $\mathbf{R}^2$ contém vetores com *dois* componentes − eles não pertencem a $\mathbf{R}^3$.

30. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ (colunas na linha 1).

Conjunto de problemas 2.2

1. $c = 7$ permite $u = 1$, $v = 1$, $w = 0$. O espaço-coluna é um plano.

2. A forma escalonada $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; variáveis livres x_1, x_3, x_4; soluções especiais (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), e (0, −3, 0, 1). Consistente quando $b^2 = 2b_1$. Solução completa $(0, b_1, 0, 0)$ mais qualquer combinação de soluções especiais.

3. $x + y + z = 1$, $x + y + z = 0$. Alterando1 para 0, $(x, y, z) = c(-1, 1, 0) + d(-1, 0, 1)$.

4. $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2v - 3 \\ v \\ 2 \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$; sem solução!

11. Uma matriz de espaço nulo $N = \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix}$ é n por $n - r$.

13. (a) $x = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, para qualquer x_2, x_4. R de linhas reduzidas $= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Solução completa $x = \begin{bmatrix} a-3b \\ 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, para qualquer x_2, x_4.

14. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ tem espaço nulo = linha através de $(-1, 1)$, mas não tem solução. Qualquer $b = \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix}$ tem muitas soluções particulares para $Ax_p = b$.

15. $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (a) $r = 1$. (b) $r = 2$. (c) $r = 1$.

20. $(uv^{\mathrm{T}})(wz^{\mathrm{T}}) = u(v^{\mathrm{T}}w)z^{\mathrm{T}}$ tem posto 1, a menos que $v^{\mathrm{T}}w = 0$.

21. Obtemos $AB = I$, que tem posto n. Então, o posto $(AB) \leq$ posto (A) força o posto $(A) = n$.

22. Se $R = EA$ e o mesmo $R = E^*B$, então $B = (E^*)^{-1}EA$. (Para obter B, reduza A para R e, então, inverta os passos de volta para B.) B é uma matriz *invertível* multiplicada por A, quando compartilham do mesmo R.

24. As r colunas pivôs de A formam uma submatriz m por r de posto r, de modo que a matriz A^* tenha r linhas pivôs independentes, fornecendo uma submatriz invertível r por r de A. (As linhas pivôs de A^* e A são as mesmas, visto que a eliminação é realizada na mesma ordem – nós simplesmente não localizamos em A^* as colunas "livres" dos zeros que aparecem para A.)

25. Penso que é verdade.

26. As soluções especiais são as colunas de $N = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

31. Como R começa com r linhas independentes, R^{T} começa com r colunas independentes (e, então, zeros). Então, *sua* forma reduzida escalonada é $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ quando I é r por r.

32. Se $c = 1$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem x_2, x_3, x_4 livres.

Se $c \neq 1$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem x_3, x_4 livres.

Soluções especiais em $N = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(c = 1)$ e $N = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(c \neq 1)$.

Se $c = 1$, $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem x_1 livre; se $c = 2$, $R = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem x_2 livre; $R = I$, se $c \neq 1, 2$.

Soluções especiais em $N = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(c = 1)$ ou $N = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(c = 2)$ ou $N = 2$ por *matriz vazia* 0.

34. (a) Solúvel se $b_2 = 2b_1$ e $3b_1 - 3b_3 + b_4 = 0$. Então, $x = \begin{bmatrix} 5b_1 - 2b_3 \\ b_3 - 2b_1 \end{bmatrix}$ (sem variáveis livres).

(b) Solúvel se $b_2 = 2b_1$ e $3b_1 - 3b_3 + b_4 = 0$.

Então, $x = \begin{bmatrix} 5b_1 - 2b_3 \\ b_3 - 2b_1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

36. $x_{\text{completo}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $x_{\text{completo}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

37. Multiplique x_p por 2, mesmo x_n; $\begin{bmatrix} x \\ X \end{bmatrix}_p$ é $\begin{bmatrix} x_p \\ 0 \end{bmatrix}$, soluções especiais também incluem as colunas de $\begin{bmatrix} -I \\ I \end{bmatrix}$; x_p e as soluções especiais não são alteradas.

39. Um sistema 1 por 3 tem pelo menos duas variáveis livres.

41. (a) A solução particular x_p é sempre multiplicada por 1.

(b) Qualquer solução pode ser x_p.

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$. Então, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é menor (comprimento $\sqrt{2}$) do que $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. (d) A solução "homogênea" no espaço nulo é $x_n = 0$ quando A é inversível.

43. (a) $r < m$, sempre $r \leq n$. (b) $r = m$, $r < n$. (c) $r < m$, $r = n$. (d) $r = m = n$.

44. Para A, $q = 3$ fornece posto 1, todos os outros q fornecem posto 2. Para B, $q = 6$ fornece posto 1, todos os outros qs fornecem posto 2.

47. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; B não pode existir, pois duas equações em três incógnitas não podem ter solução.

50. $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ e $x_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{-1} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} \end{bmatrix}$: nenhuma solução por causa da linha 3.

52. $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (R não se origina desse U).

53. A tem posto $4 - 1 = 3$; a solução completa para $Ax = 0$ é $x = (2, 3, 1, 0)$.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{com } -2,\ -3 \text{ na coluna livre.}$$

54. (a) Falso. (b) Verdadeiro. (c) Verdadeiro (somente n colunas).

(d) Verdadeiro (somente m linhas).

57. A coluna 5 certamente não tem pivô, pois é uma combinação das colunas anteriores, e x_5 está livre. Com quatro pivôs nas outras colunas, a solução especial é $(1, 0, 1, 0, 1)$. O espaço nulo contém todos os múltiplos de $(1, 0, 1, 0, 1)$ (uma reta em $\mathbf{R}^5$).

58. Se a coluna $1 =$ coluna 5, então x_5 é uma variável livre. Sua solução especial é $(-1, 0, 0, 0, 1)$.

60. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

62. R tem mais probabilidade de ser I; R tem mais probabilidade de ser I com a quarta linha de zeros.

63. Qualquer linha nula vem depois destas linhas: $R = [1 \quad -2 \quad -3]$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $R = I$.

67. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

69. Essa construção é impossível: duas colunas pivôs, duas variáveis livres, somente três colunas.

Conjunto de problemas 2.3

2. Se $a = 0$, então a coluna $1 = 0$; se $d = 0$, então b(coluna 1) $- a$(coluna 2) $= 0$; se $f = 0$, então todas as colunas acabam em zero (e são perpendiculares a $(0, 0, 1)$, todas no plano xy devem ser dependentes).

3. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -18/5 \end{bmatrix}$: invertível $\Rightarrow$ colunas independentes (poderia ter utilizado linhas).

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, colunas se somam a 0 (poderia utilizar linhas).

4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = 0$ fornece $c_3 = c_2 = c_1 = 0$. Mas $v_1 + v_2 - 4v_3 + v_4 = 0$ (dependente).

5. A soma $v_1 - v_2 + v_3 = 0$, porque $(w_2 - w_3) - (w_1 - w_3) + (w_1 - w_2) = 0$.

8. (a) Os quatro vetores são as colunas de uma matriz 3 por 4 A com pelo menos uma variável livre, então $Ax = 0$. (b) Dependente se $[v_1 \quad v_2]$ tiver posto 0 ou 1. (c) $0v_1 + c(0, 0, 0) = 0$ tem uma solução não nula (tome qualquer $c \neq 0$).

12. $v = \frac{1}{2}(v + w) + \frac{1}{2}(v - w)$ e $w = \frac{1}{2}(v + w) - \frac{1}{2}(v - w)$. Os dois pares *geram* o mesmo espaço. São uma base quando v e w são *independentes*.

14. Se a eliminação gera uma ou mais linhas nulas, as linhas de A são linearmente dependentes; por exemplo, no problema 16 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

15. Todas as dimensões são 2. Os espaços-linha de A e U são os mesmos.

16. (a) Linha em $\mathbf{R}^3$. (b) Plano em $\mathbf{R}^3$. (c) Plano em $\mathbf{R}^3$. (d) Todos de $\mathbf{R}^3$.

20. Os vetores independentes n geram um espaço de dimensão n. Eles são uma *base* para este espaço. Se forem as colunas de A, então m não é *nada menos* que n ($m \geq n$).

22. Colunas independentes $\Rightarrow$ posto n. As colunas abrangem $\mathbf{R}^m \Rightarrow$ posto m. As colunas são a base para $\mathbf{R}^m \Rightarrow$ posto $= m = n$.

23. As colunas 1 e 2 são bases para os espaços-coluna (diferentes) de A e U; as linhas 1 e 2 são bases para os espaços-linha (iguais); $(1, -1, 1)$ é uma base para os espaços nulos (iguais).

24. $\boldsymbol{C}(U)$: quaisquer bases para $\mathbf{R}^2$; $\boldsymbol{N}(U)$: (linha 1 e linha 2) ou (linha 1 e linha 1 + linha 2).

26. (a) A única solução é $x = 0$, porque *as colunas são independentes.* (b) $Ax = b$ é solúvel porque *as colunas geram* $\mathbf{R}^5$.

28. Seja $v_1 = (1, 0, 0, 0), \ldots, v_4 = (0, 0, 0, 1)$ os vetores de coordenada. Se $\mathbf{W}$ for a linha através de $(1, 2, 3, 4)$, nenhum dos vs estarão em $\mathbf{W}$.

30. (a) Se não fosse uma base, poderíamos somar mais vetores independentes, que não excederiam a k dimensão fornecida. (b) Se não fosse uma base, poderíamos apagar alguns vetores, deixando menos que a dimensão fornecida k.

31. posto $(A) = 2$ se $c = 0$ e $d = 2$; posto $(B) = 2$, exceto quando $c = d$ ou $c = -d$.

32. (a) Falso, não deve haver nenhuma solução. (b) Verdadeiro, 7 vetores em $\mathbf{R}^5$ são dependentes.

33. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Some $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ são uma base para todas as $A = -A^{\mathrm{T}}$.

38. $y(0) = 0$ exige que $A + B + C = 0$. Uma base é $\cos x - \cos 2x$ e $\cos x - \cos 3x$.

39. $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & & \\ & \mathbf{1} & \\ & & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \mathbf{1} & \\ \mathbf{1} & & \\ & & \mathbf{1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & \mathbf{1} & \\ & & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & \mathbf{1} \\ & \mathbf{1} & \\ \mathbf{1} & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{1} & & \\ & & \mathbf{1} \\ & \mathbf{1} & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & & \\ & \mathbf{1} & \end{bmatrix}.$

Verifique o elemento (1, 1), então (3, 2), então (3, 3), então (1, 2) para demonstrar que esses Ps são independentes. Quatro condições nos nove elementos tornam todas as somas de linhas e colunas iguais: soma de linha 1 = soma de linha 2 = soma de linha 3 = soma de coluna 1 = soma de coluna 2 (= soma de coluna 3 é automática por causa da soma de todas as linhas = soma de todas as colunas).

43. $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ pode ser $x, 2x, 3x$ (dim 1) ou $x, 2x, x^2$ (dim 2) ou x, x^2, x^3 (dim 3).

44. Se a matriz 5 por 5 $[A \quad b]$ for inversível, b não será uma combinação das colunas de A. Se $[A \quad b]$ for singular e A tiver colunas independentes, b *será* uma combinação dessas colunas.

Conjunto de problemas 2.4

2. $\boldsymbol{C}(A)$: $r = 2$, (1, 0, 1) (0, 1, 0); $\boldsymbol{N}(A)$: $n - r = 2$, (2, −1, 1, 0), (−1, 0, 0, 1);
$\boldsymbol{C}(A^{\mathrm{T}})$: $r = 2$, (1, 2, 0, 1), (0, 1, 1, 0); $\boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}})$: $m - r = 1$, (−1, 0, 1);
$\boldsymbol{C}(U)$: (1, 0, 0), (0, 1, 0); $\boldsymbol{N}(U)$: (2, −1, 1, 0), (−1, 0, 0, 0);
$\boldsymbol{C}(U^{\mathrm{T}})$: (1, 2, 0, 1), (0, 1, 1, 0); $\boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}})$: (0, 0, 1).

4. A multiplicada por cada coluna de B é igual a zero, portanto, $\boldsymbol{C}(B)$ está contido no espaço nulo $\boldsymbol{N}(A)$.

5. Falso, somente sabemos que as dimensões são iguais. O espaço nulo esquerdo tem uma dim $= m - r$ menor.

7. Com colunas independentes: posto n; espaço nulo $= \{0\}$; o espaço-linha é $\mathbf{R}^n$; inversa *à esquerda*.

11. $A = [1 \quad 1 \quad 0]$; $B = [0 \quad 0 \quad 1]$.

12. A partir de $Ax = 0$, o espaço-linha e o espaço nulo devem ser ortogonais. Veja o Capítulo 3.

14. $d = bc/a$; o único pivô é a.

16. Se $Ax = 0$ tem uma solução não nula, então $r < n$ e $\boldsymbol{C}(A^{\mathrm{T}})$ é menor que $\mathbf{R}^n$. Portanto, $A^{\mathrm{T}}y = f$ não é solúvel para algumas f. Exemplo: $A = [1 \quad 1]$ e $f = (1, 2)$.

18. $[1 \quad 2 \quad 4]$; $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$ tem o mesmo espaço nulo.

20. A inversa A: base do espaço-linha = base do espaço-coluna = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1); as bases do espaço nulo e do espaço nulo esquerdo são vazias. B: base do espaço-linha (1, 0, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 1, 0), e (0, 0, 1, 0, 0, 1); base do espaço-coluna (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1); base do espaço nulo (−1, 0, 0, 1, 0, 0), (0, −1, 0, 0, 1, 0), e (0, 0, −1, 0, 0, 1); a base do espaço nulo esquerdo é vazia.

21. Não – por exemplo, todas as matrizes inversas n por n têm os mesmos quatro subespaços.

23. (a) Nenhuma solução significa que $r < m$. Sempre $r \leq n$. Não se pode comparar m e n.
(b) Se $m - r > 0$, o espaço nulo de A^{T} contém um vetor diferente de zero.

24. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. (b) Impossível: dimensões $1 + 1 \neq 3$. (c) $[1 \quad 1]$.

(d) $\begin{bmatrix} -9 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. (e) Impossível: espaço-linha = o espaço-coluna exige $m = n$.

Então $m - r = n - r$.

25. (a) Os mesmos espaço-linha e espaço nulo. Portanto, o posto (dimensão do espaço-linha) é o mesmo. (b) Os mesmos espaço-coluna e espaço nulo esquerdo à esquerda. O mesmo posto (dimensão do espaço-coluna).

28. A base do espaço-linha $(1, 2, 3, 4)$, $(0, 1, 2, 3)$, $(0, 0, 1, 2)$; base do espaço nulo $(0, 1, -2, 1)$; base do espaço-coluna $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$; o espaço nulo à esquerda tem base vazia.

30. A linha 3 − 2 (linha 2) + linha 1 = linha zero, então os vetores $c(1, -2, 1)$ estão no espaço nulo à esquerda. Os mesmos vetores estão no espaço nulo.

32. (a) Verdadeiro (mesmo posto). (b) Falso ($A = [1\ 0]$). (c) Falso (A pode ser inversa e também não simétrica). (d) Verdadeiro.

35. Se $Av = 0$ e v é uma linha de A, então $v \cdot v = 0$. Somente $v = 0$ está em ambos os espaços.

37. (a) u e w abrangem $\boldsymbol{C}(A)$. (b) v e z abrangem $\boldsymbol{C}(A^{\mathrm{T}})$. (c) posto < 2 se u e w forem dependentes ou v e z forem dependentes. (d) O posto de $uv^{\mathrm{T}} + wz^{\mathrm{T}}$ é 2.

38. Posto $r = n$ significa que o espaço nulo = vetor nulo e $xn = 0$.

41. $a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{13} = 1, a_{22} = 0, a_{32} = 1, a_{31} = 0, a_{23} = 1, a_{33} = 0, a_{21} = 1$ (não exclusivo).

Conjunto de problemas 2.5

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{N}(A)$ contém múltiplos de $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}})$ contém múltiplos de $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

6. As condições em b são $b_1 + b_4 - b_5 = 0$, $b_3 - b_4 + b_6 = 0$, $b_2 - b_5 + b_6 = 0$.

8. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_5 & -c_1 & -c_2 & -c_5 \\ -c_1 & c_1 + c_3 + c_4 & -c_3 & -c_4 \\ -c_2 & -c_3 & c_2 + c_3 + c_6 & -c_6 \\ -c_5 & -c_4 & -c_6 & c_4 + c_5 + c_6 \end{bmatrix}$.

Estes cs que se conectam ao nó j aparecerão na linha j.

9. Os valores elementos em cada linha se somam a zero. Portanto, qualquer combinação terá essa mesma propriedade: $f_1 + f_2 + f_3 = 0$; $A^{\mathrm{T}}y = f \Rightarrow y_1 + y_3 = f_1$, $-y_1 + y_2 = f_2$, $-y_2 - y_3 = f_3 \Rightarrow f_1 + f_2 + f_3 = 0$. Isso significa que a corrente total que vem de fora é zero.

10. $\begin{bmatrix} c_1 + c_3 & -c_1 & -c_3 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_3 & -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} c_1 + c_3 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix}$ tem pivôs $c_1 + c_3$, $\dfrac{c_1c_3 + c_1c_2 + c_2c_3}{c_1 + c_3}$.

11. 9 nós − 12 arestas + 4 ciclos = 1; 7 nós − 12 arestas + 6 ciclos = 1.

12. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}; x = \begin{bmatrix} -4 \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{14}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{14}{3} \end{bmatrix}.$$

15. Há 20 escolhas de 3 arestas de 6, porque "6 escolhem 3" $= \dfrac{6!}{3!3!} = 20$. Quatro escolhas resultam em triângulos, deixando 16 árvores geradoras.

16. $x = (1, 1, 1, 1)$ fornece $Ax = 0$; então $A^{\mathrm{T}} Ax = 0$; o posto é novamente $n - 1$.

17. $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e

$M^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. $(M^2)_{ij} = a_{i1}a_{1j} + \cdots + a_{in}a_{nj}$ e obtemos $a_{ik}a_{kj} = 1$ quando há um caminho de duas etapas i para k para j. Observe três caminhos de um nó para ele mesmo.

21. Creio que já está integrado.

Conjunto de problemas 2.6

1. e^t e e^{-t} são uma base para as soluções de $u'' = u$.

2. Segunda matriz derivada $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. O espaço nulo é gerado por (1, 0, 0, 0) e (0, 1, 0, 0), que fornece a P_1 linear. As segundas derivadas de funções lineares são zero. O espaço-coluna é, acidentalmente, o mesmo que o espaço nulo, pois as segundas derivadas de volumes cúbicos são lineares.

6. $||Ax||^2 = 1$ sempre produz uma elipse.

7. $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então $H^2 = I$.

9. Rotação $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

12. Transformam-se em (1, 3), (2, 6), (−1, −3). O eixo de x gira; as linhas verticais se deslocam para cima/para baixo, mas permanecem verticais.

13. (a) Sim. (b) Sim. Não precisamos de parênteses $(AB)C$ ou $A(BC)$ para ABC!

16. $S(T(v)) = S(v) = v$.

17. (b) e (c) são lineares, (a) não atinge $T(2v) = 2T(v)$, (d) não atinge $T(v + w) = T(v) + T(w)$.

18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $A^2 = I$; a transposta dupla de uma matriz resulta na própria matriz. Observe que $A_{23} = 1$, porque a transposta da matriz 2 é a matriz 3.

19. Com $w = 0$, a linearidade fornece $T(v + 0) = T(v) + T(0)$. Com isso, $T(0) = 0$. Com $c = -1$, a linearidade fornece $T(-0) = -T(0)$. Certamente, $T(-0) = T(0)$. Com isso, $T(0) = 0$.

23. (a) é uma inversa com $T^{-1}(y) = y^{1/3}$; (c) é uma inversa com $T^{-1}(y) = y - 11$.

24. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

26. $T(T(v)) = (v_3, v_1, v_2)$; $T^3(v) = v$; $T^{100}(v) = T(T^{99}(v)) = T(v)$.

28. (a) $T(1, 0) = 0$. (b) $(0, 0, 1)$ não está no intervalo. (c) $T(0, 1) = 0$.

31. Nenhuma matriz A fornece $A \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Para os professores: o espaço na matriz tem dimensão 4. As transformações lineares nesse espaço devem provir das matrizes 4 por 4 (16 parâmetros). Essas multiplicações por A nos problemas 31 e 32 eram transformações especiais com apenas 4 parâmetros.

32. $T(I) = 0$, mas $M = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = T(M)$; estes preenchem o intervalo. $M = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$ no núcleo.

33. A lei associativa fornece $A(M_1 + M_2); = AM_1 + AM_2$. A lei distributiva sobre os cs fornece $A(cM) = c(AM)$.

38. A matriz de Hadamard H possui colunas ortogonais de comprimento 2. Portanto, a inversa de H é $H^{T}/4 = H/4$.

39. $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$; o determinante de Vanderm onde $= (b - a)(c - a)(c - b)$; os pontos a, b, c devem ser diferentes e, por isso, o determinante $\neq 0$ (a interpolação é possível).

42. Reordene a base por meio da *matriz de permutação*; mude os comprimentos módulos com a *matriz diagonal positiva*.

43. $S(T(v)) = (-1, 2)$ mas $S(v) = (-2, 1)$ e $T(S(v)) = (1, -2)$. Portanto, $TS \neq ST$.

44. (a) $M = \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}$. (b) $N = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}$. (c) $ad = bc$.

47. Se T não é uma invertível, então $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ não será uma base. Com isso, não poderíamos escolher $w_i = T(v_i)$ como base de resultados.

50. Falso: os vetores n não nulos teriam que ser independentes.

Conjunto de problemas 3.1

1. v_1 e v_3 são ortogonais, assim como v_2 e v_3.

2. $x = (-2, 1, 0)$; $y = (-1, -1, 1)$; a linha $z = (1, 2, 1)$ é ortogonal ao espaço nulo.

4. $(x_2/x_1)(y_2/y_1) = -1$ significa que $x_1y_1 + x_2y_2 = 0$, portanto, $x^Ty = 0$.

7. $\|x\| = \sqrt{21}$; $\|y\| = 3\sqrt{2}$; $x^T y = 0$.

8. (a) Se **V** e **W** são linhas em $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{V}^\perp$ e $\mathbf{W}^\perp$ são planos de intersecção. (b) **V**.

10. $(1, 2, -1)$ é perpendicular a **P**. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ tem $\boldsymbol{N}(A) = \mathbf{P}$; $B = [1 \quad 2 \quad -1]$ tem espaço--linha $= \mathbf{P}$.

14. O complemento ortogonal é a linha reta que passa por $(-1, -1, 1)$ e $(0, 0, 0)$.

16. A figura divide qualquer y em $\mathbf{R}^m$ na parte do espaço-coluna + parte do espaço nulo à esquerda.

19. Se $A^T y = 0$, então $y^Tb = y^T Ax = (y^TA)x = 0$, que contradiz $y^Tb \neq 0$.

20. A matriz com a base para **V** como suas linhas. Então, o espaço nulo é $\mathbf{V}^\perp = \mathbf{W}$.

21. Nenhuma matriz desse tipo, porque $(1, 2, 1)^T(1, -2, 1) \neq 0$.

25. (a) Se $Ax = b$ tem uma solução e $A^Ty = 0$, então $b^Ty = (Ax)^Ty = 0$.

(b) b não se encontra no espaço-coluna; portanto, não é perpendicular a todos os y no espaço nulo à esquerda.

29. $x = x_r + x_n$, em que x_r está no espaço linha e x_n está no espaço nulo. Então, $Ax_n = 0$ e $Ax = Ax_r + Ax_n = Ax_r$. Todos os vetores Ax são combinações de colunas de A. Se $x = (1, 0)$, então $x_r = (1/2, 1/2)$.

30. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ tem subespaços = quatro linhas; $(1, 1)$ ortogonal a $(-1, 1)$, $(1, 2)$ ortogonal a $(-2, 1)$. Sempre espaço-linha $\perp$ espaço nulo.

31. x divide-se em $x_r + x_n = (1, -1) + (1, 1) = (2, 0)$.

32. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ não é ortogonal a $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ em $\boldsymbol{C}(A)$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ em $\boldsymbol{N}(A^T)$ é impossível: não é perpendicular. (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ tem $A^2 = 0$.

(e) $(1, 1, 1)$ estará no espaço nulo e no espaço-linha; nenhuma matriz desse tipo.

33. (a) Para uma matriz simétrica, o espaço-coluna e o espaço-linha são os mesmos.

(b) x está no espaço nulo e z está no espaço-coluna = espaço-linha: então, esses "autovetores" têm $x^Tz = 0$.

34. $Ax = B\hat{x}$ significa que $[A \quad B] \begin{bmatrix} x \\ -\hat{x} \end{bmatrix} = 0$. Três equações homogêneas em quatro incógnitas sempre têm uma solução não nula. Aqui, $x = (3, 1)$ e $\hat{x} = (1, 0)$, e $Ax = B\hat{x} = (5, 6, 5)$ está em ambos os espaços-coluna. Dois planos em $\mathbf{R}^3$ (passando por zero) devem se encontrar em, pelo menos, uma reta!

36. $\mathrm{S}^\perp$ é o espaço nulo de $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Portanto, $\mathbf{S}^\perp$ é um *subespaço* mesmo que **S** não seja.

39. $(1, 1, 1, 1)$ é uma base para $\mathbf{P}^\perp$. $A = [1\ 1\ 1\ 1]$ tem o plano **P** como seu espaço nulo.

40. Se **V** é totalmente de $\mathbf{R}^4$, então $\mathbf{V}^\perp$ contém somente o *vetor nulo*. Então, $(\mathbf{V}^\perp)^\perp = \mathbf{R}^4 = \mathbf{V}$.

43. $A^Ty = 0$ fornece $(Ax)^Ty = x^TA^Ty = 0$. Então, $y \perp Ax$ e $\boldsymbol{N}(A^T) \perp \boldsymbol{C}(A)$.

46. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$,

$A^TA = 9I$ é *diagonal*: $(A^TA)_{ij}$ = (coluna i de A) · (coluna j).

47. Coluna 1 de A^{-1} é ortogonal ao espaço gerado pela 2ª, …, n-ésimas linhas de A.

50. (a) $(1, -1, 0)$ está nos dois planos. Os vetores normais são perpendiculares, os planos ainda se intersectam! (b) São necessários *três* vetores ortogonais para atravessar todo o complemento ortogonal em $\mathbf{R}^5$. (c) As linhas podem se encontrar sem ser ortogonais.

52. Quando $AB = 0$, o espaço-coluna de B está contido no espaço nulo de A. Portanto, a dimensão de $\boldsymbol{C}(B) \leq$ dimensão de $\boldsymbol{N}(A)$. Isso significa que o posto $(B) \leq 4$ – posto (A).

Conjunto de problemas 3.2

1. (a) $(x + y)/2 \geq \sqrt{xy}$ (média aritmética $\geq$ média aritmética de x e y).

(b) $||x + y||^2 \leq (||x|| + ||y||)^2$ significa que $(x + y)^T(x + y) \leq ||x||^2 + 2||x||\,||y|| + ||y||^2$.

O lado esquerdo é $x^Tx + 2x^Ty + y^Ty$. Após o cancelamento, este é $x^Ty \leq ||x||\,||y||$.

2. $P^2 = \dfrac{aa^Taa^T}{a^Taa^Ta} = \dfrac{a(a^Ta)a^T}{(a^Ta)(a^Ta)} = \dfrac{aa^T}{a^Ta} = P.$

3. Escolha $b = (1, ..., 1)$; igualdade se $a_1 = \cdots = a_n$ (então, a é paralelo a b).

5. (a) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{bmatrix}$; $P_2 = I - P_1 = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$. (b) $P_1 + P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $P_1P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

A soma de projeções em duas linhas particulares fornece o próprio vetor. A projeção em uma linha e, em seguida, em uma linha perpendicular fornece o vetor nulo.

8. Traço $= \dfrac{a_1a_1}{a^Ta} + \cdots + \dfrac{a_na_n}{a^Ta} = \dfrac{a^Ta}{a^Ta} = 1$

10. $\cos\theta = 1/\sqrt{n}$, então $\theta = \text{arcos}\,(1/\sqrt{n})$;

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} [1/n \ \ \cdots \ \ 1/n\ ] \ = \ \text{todos os valores elementos } \frac{1}{n}.$$

11. $p = (10/3,\ 10/3,\ 10/3)$; $(5/9,\ 10/9,\ 10/9)$.

14. $||Ax||^2 = (Ax)^T(Ax) = x\ A^T\ Ax$, $||A^Tx||^2 = (A^Tx)^T(A^Tx) = xAA^Tx$. Se $A^TA = AA^T$, então $||Ax|| = ||A^Tx||$. (Essas matrizes são chamadas de *normais*.)

19. (a) $a^Tb/a^Ta = 5/3$; $p = (5/3, 5/3, 5/3)$; $e = (-2/3, 1/3, 1/3)$ tem $e^Ta = 0$.

(b) $a^Tb/a^Ta = -1$; $p = (1, 3, 1) = b$ e $e = (0, 0, 0)$.

20. $P_1 = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = P_1^2$ e $P_1b = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$. $P_2 = \dfrac{1}{11}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $P_2b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

21. $P_1 = \dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$, $P_2 = \dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

P_1P_2 = matriz nula, porque $a_1 \perp a_2$.

23. Como A é invertível, $P = A(A^TA)^{-1}A^T = AA^{-1}(A^T)^{-1}A^T = I$: projeta-se completamente em $\mathbf{R}^2$.

26. $$P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix} = I.$$

Conjunto de problemas 3.3

1. $\hat{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$; $p = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$; $b - p = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ é perpendicular às duas colunas.

4. $b = 4, 5, 9$ em $t = -1, 0, 1$; a melhor reta é $6 + (5/2)t$; $p = (7/2, 6, 17/2)$.

5. $\hat{x} = 2$; $E^2 = (10 - 3x)^2 + (5 - 4x)^2$ é minimizado; $(4, -3)^T(3, 4) = 0$.

8. $H^2 = (I - 2P)^2 = I - 4P + 4P^2 = I - 4P + 4P = I$. Duas reflexões fornecem I.

9. A melhor reta $61/35 - (36/35)t$; $p = (133/35, 95/35, 61/35, -11/35)$ de $C + Dt$.

10. (a) $P^T = (P^TP)^T = P$. Então, $P = P^TP = P^2$. (b) P projeta-se no espaço $\mathbf{Z} = \{0\}$.

12. $$P = A(A^TA)^{-1}A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

13. Projeção em $x + y = 0$ = projeção em $(-1, 1) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.

17. $P + Q = I$, $PQ = 0$, transpõe-se para $QP = 0$, então $(P - Q)(P - Q) = P - 0 - 0 + Q = I$.

19. A melhor reta é $\begin{bmatrix} a_1^Ta_1 & -a_1^Ta_2 \\ -a_1^Ta_2 & a_2^Ta_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^Tb \\ -a_2^Tb \end{bmatrix}$; $\hat{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

20. $C = (A^TA)^{-1}A^Tb$, $A^T = [1 \cdots 1]$, $b = (y_1, \ldots, y_m)^T$, então

$$C = \frac{A^Tb}{A^TA} = \frac{y_1 + \cdots + y_m}{m}.$$

21. $$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix};\; x = \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \end{bmatrix};\; b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

25. A matriz de projeção para o espaço-linha seria $A^T(AA^T)^{-1}A$, se as linhas fossem independentes.

27. $(\hat{x} - x)(\hat{x} - x)^T = (A^TA)^{-1}A^T[(b - Ax)(b - Ax)^T]A(A^TA)^{-1}$. Para erros independentes, substituindo $(b - Ax)(b - Ax)^T = \sigma^2 I$ fornece a *matriz de covariação* $(A^TA)^{-1}A^T\sigma^2A(A^TA)^{-1}$. Isso é simplificado para $\sigma^2(A^TA)^{-1}$: fórmula perfeita para a matriz de covariação.

28. (a) $a^Ta = m$, $a^Tb = b^1 + \cdots + b_m$. Portanto, $\hat{x}$ é a média dos bs. (b) A variação é $\|e\|^2 = \sum_{i=1}^{m}(b_i - \hat{x})^2$. (c) $p = (3, 3, 3)$, $e = (-2, -1, 3)$, $p^Te = 0$.

$$P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

30. $\frac{1}{10}b_{10} + \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{10}}\hat{x}_9 = \frac{1}{10}(b_1 + \cdots + b_{10})$.

32. $\hat{x}w = \dfrac{w_1^2 b_1 + \cdots + w_m^2 b_m}{w_1^2 + \cdots + w_m^2}$.

34. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix}$. Mude o lado direito para $p = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 13 \\ 17 \end{bmatrix}$; $\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ resolve $A\hat{x} = p$.

38. Parábola mais próxima: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix}$.

$$A^{\mathrm{T}}A\hat{x} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 26 \\ 8 & 26 & 92 \\ 26 & 92 & 338 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{D} \\ \hat{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 112 \\ 400 \end{bmatrix}.$$

40. (a) A melhor reta é $x = 1 + 4t$, que atravessa o ponto central $(\hat{t}, \hat{b}) = (2, 9)$.

(b) A partir da primeira equação: $Cm + D\sum t_i = \sum b_i$. Divida por m para obter $C + D\hat{t} = \hat{b}$.

41. $\hat{x}_W = (1/21,\ 4/7)$; $A\hat{x}_W = (1/21,\ 13/21,\ 25/21)$,
$b - A\hat{x}_W = (-1/21,\ 8/21,\ -4/21)$, $(A\hat{x}_W)W^{\mathrm{T}}W(b - A\hat{x}_W) = 0$.

Conjunto de problemas 3.4

2. (a) $-4 = C - 2D$, $-3 = C - D$, $-1 = C + D$, $0 = C + 2D$. (b) A melhor linha reta $-2 + t$ passa pelos 4 pontos; $E^2 = 0$. (c) b está no espaço-coluna.

3. $(I - 2uu^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(I - 2uu^{\mathrm{T}}) = I - 4uu^{\mathrm{T}} + 4uu^{\mathrm{T}}uu^{\mathrm{T}} = I$; $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

5. Projeção sobre a_3: $(-2/3,\ 1/3,\ -2/3)$; a soma é o próprio b; observe que $a_1a_1^{\mathrm{T}}$, $a_2a_2^{\mathrm{T}}$, $a_3a_3^{\mathrm{T}}$ são projeções para três direções ortogonais. Sua soma é a projeção para o espaço integral e deve ser a identidade.

7. Q é triangular superior: a coluna 1 tem $q_{11} = \pm 1$; pela ortogonalidade a coluna 2 deve ser $(0, \pm 1, 0, \ldots)$; pela ortogonalidade a coluna 3 é $(0, 0, \pm 1, \ldots)$; e assim por diante.

9. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Q\,R$.

12. $(x_1q_1 + \cdots + x_nq_n)^{\mathrm{T}}\,(x_1q_1 + \cdots + x_nq_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \Rightarrow ||b||^2 = b^{\mathrm{T}}b = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

13. A combinação mais próxima a q_3 é $0q_1 + 0q_2$.

16. $q_1 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}, q_2 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, q_3 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$ está no espaço nulo à esquerda;

$\hat{x} = \begin{bmatrix} q_1^{\mathrm{T}} b \\ q_2^{\mathrm{T}} b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$

17. Pela ortogonalidade, as funções mais próximas são 0 sen $2x = 0$ e $0 + 0x = 0$.

18. A reta mais próxima é $y = 1/3$ (horizontal, desde que $(x, x^2) = 0$).

23. $R\hat{x} = Q^{\mathrm{T}} b$ fornece $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \hat{x} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\hat{x} = \begin{bmatrix} 5/9 \\ 0 \end{bmatrix}$.

25. $C^* - (q_2^{\mathrm{T}} C^*)\, q_2$ é $c - (q_1^{\mathrm{T}} c)\, q_1 - (q_2^{\mathrm{T}} c)\, q_2$ porque $q_2^{\mathrm{T}} q_1 = 0$.

26. $a_0 = 1/2, a_1 = 0, b_1 = 2/\pi$.

28. (a) Verdadeiro. (b) Verdadeiro. $Qx = x_1 q_1 + x_2 q_2$. $\|Qx\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ porque $q_1^{\mathrm{T}} q_2 = 0$.

30. $(1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2},\ 0,\ 0),\ (1/\sqrt{6},\ 1/\sqrt{6},\ 2/\sqrt{6},\ 0),$
$(-1/2\sqrt{3},\ -1/2\sqrt{3},\ 1/2\sqrt{3},\ -1/\sqrt{3})$.

32. $A = a = (1, -1, 0, 0)$; $B = b - p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0\right)$; $C = c - p_A - p_B = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1\right)$.
Observe o padrão nesses vetores ortogonais A, B, C. Em seguida, $(1, 1, 1, 1)/4$.

Conjunto de problemas 3.5

3. $c = (1, 0, 1, 0)$.

4. $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} C_{\text{par}} = \\ C_{\text{impar}} = \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} y' = \\ y'' = \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow y = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$

5. (a) $y = F$ vezes $(1, 0, 0, 0)$ = coluna zero nula de $F = (1, 1, 1, 1)$.
(b) $c = (1, 1, 1, 1)/4$.

8. A submatriz é F_3.

9. $c_0 = (f_0 + f_1 + f_2 + f_3)/4$, $c_1 = (f_0 - i f_1 - f_2 + i f_3)/4$, $c_2 = (f_0 - f_1 + f_2 - f_3)/4$, $c_3 = (f_0 + i f_1 - f_2 - i f_3)/4$; f ímpar significa $f_0 = 0, f_2 = 0, f_3 = -f_1$. Então, $c_0 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = -c_1$, portanto, c também é ímpar.

10. $F^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F^4 = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} = 4^2 I.$

12. $F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & i^2 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 1 & i^2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & & 1 & \\ & 1 & & 1 \\ 1 & & -1 & \\ & -i & & i \end{bmatrix} = \frac{1}{4} F^{\mathrm{H}}.$

13. $e^{ix} = -1$, pois $x = (2k + 1)\pi$, $e^{i\theta} = i$, pois $\theta = 2k\pi + \pi/2$, k é um número inteiro.

18. Autovalores $e_0 = 2 - 1 - 1 = 0$, $e_1 = 2 - i - i^3 = 2$, $e_2 = 2 - (-1) - (-1) = 4$, $e_3 = 2 - i^3 - i^9 = 2$. Verifique o traço $0 + 2 + 4 + 2 = 8$.

19. $D = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & e^{2\pi/6} & \\ & & e^{4\pi i/6} \end{bmatrix}$ e $F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{2\pi i/3} & e^{4\pi i/3} \\ 1 & e^{4\pi i/3} & e^{2\pi i/3} \end{bmatrix}$.

22. $\Lambda = \text{diag}(1, i, i^2, i^3)$; $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e P^{T} levam a $\lambda^3 - 1 = 0$.

Conjunto de problemas 4.2

1. As operações da linha deixam det A inalterado pela Regra 5. Então, a multiplicação de uma linha por -1 (Regra 3) fornece a regra de alteração de linha: det $B = -$det A.

2. det $(2A) = 8$ e det $(-A) = (-1)^4$ det $A = \frac{1}{2}$ e det $(A^2) = \frac{1}{4}$ e det $(A^{-1}) = 2$.

5. det $A = 0$ (singular); det$U = 16$; det $U^{\mathrm{T}} = 16$; det$U^{-1} = 1/16$; det $M = 16$ (2 alterações).

6. O novo determinante é $(1 - m\ell)(ad - bc)$.

7. Para a primeira matriz, duas alterações de linha produzirão a matriz identidade. A segunda matriz precisa de três alterações de linha para chegar a I.

10. Se $|\det Q|$ não for 1, então det $Q^n = (\det Q)^n$ iria ser detonado se se expandisse ou se aproximasse de zero. Mas Q^n permanece uma matriz ortogonal. Então, det Q deve ser 1 ou -1.

13. det $(A) = 10$, det $(A^{-1}) = \frac{1}{10}$, det $(A - \lambda I) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ para $\lambda = 5$ e $\lambda = 2$.

14. Somar cada coluna de A à primeira coluna torna-a uma coluna nula, então det $A = 0$. Se cada linha de A se somar a 1, então cada linha de $A - I$ soma-se a 0 e det $(A - I) = 0$. Mas det A não precisa ser 1: $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ tem det $(A - I) = 0$, mas det $A = 0 \neq 1$.

15. (a) Regra 3 (fatorar -1 de cada linha) fornece det $(K^{\mathrm{T}}) = (-1)^3$ det K. Então, $-$det K = det K^{T} = det K fornece det $K = 0$.

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem det $= 1$.

17. A obtenção de determinantes fornece (det C) (det D) $= (-1)^n$ (det D) (det C). Para n, até o raciocínio falha (porque $(-1)^n = +1$) e a conclusão está errada.

20. $\det(A^{-1}) = \det \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & \dfrac{-b}{ad - bc} \\ \dfrac{-c}{ad - bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{bmatrix} = \dfrac{ad - bc}{(ad - bc)^2} = \dfrac{1}{ad - bc}$.

24. Linha 3 – linha 2 = linha 2 − linha 1, portanto, A é singular.

27. det $(L) = 1$, det $(U) = -6$, det $(A) = -6$, det $(U^{-1}L^{-1}) = -\frac{1}{6}$, e det $(U^{-1}L^{-1}A) = 1$.

28. Determinante = 36 e determinante = 5.

29. A é retangular, portanto, det $(A^{\mathrm{T}}A) \neq$ (det A^{T})(det A): estes não são definidos.

31. Os maiores determinantes de matrizes 0–1 para $n = 1, 2, ...$, são 1, 1, 2, 3, 5, 9, 32, 56, 144, 320 podem ser encontrados no *site* *<www.mathworld.wolfram.com/HadamardsMaximum-*

DeterminantProblem.html> e também na *On-Line Encyclopedia of IntegerSequences* [Enciclopédia *On-line* de Sequências de Números Inteiros]: <www.research.att.com>. Com valores −1 e 1, o maior determinante 4 por 4 (consulte Hadamard no índice remissivo) é 16.

32. $\det(I + M) = 1 + a + b + c + d$. Subtraia a linha 4 das linhas 1, 2 e 3. Em seguida, subtraia a(linha 1) + b(linha 2) + c(linha 3) da linha 4. Isto resultará em uma matriz triangular com 1, 1, 1 e $1 + a + b + c + d$ em sua diagonal.

35. Os determinantes de Hilbert são 1, 8×10^{-2}, $4{,}6 \times 10^{-4}$, $1{,}6 \times 10^{-7}$, $3{,}7 \times 10^{-12}$, $5{,}4 \times 10^{-18}$, $4{,}8 \times 10^{-25}$, $2{,}7 \times 10^{-33}$, $9{,}7 \times 10^{-43}$, $2{,}2 \times 10^{-53}$. Pivôs e razões de determinantes, portanto, o décimo pivô está próximo de $10^{-53}/10^{-43} = 10^{-10}$: muito pequeno.

Conjunto de problemas 4.3

1. (a) Verdadeiro (regra do produto). (b) Falso (todos os números 1).
(c) Falso ($\det [1\ \ 1\ \ 0;\ 0\ \ 1\ \ 1;\ 1\ \ 0\ \ 1] = 2$).

2. O cofator 1, 1 é F_{n-1}. O cofator 1, 2 tem um valor 1 na coluna 1, com cofator F_{n-2}. Multiplique por $(-1)^{1+2}$ e também por −1 para encontrar $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Portanto, os determinantes são números de Fibonacci, exceto se F_n for o F_{n-1} comum.

3. (a) $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} = 1$; *par*, portanto, $\det A = 1$.
(b) $b_{13}b_{22}b_{31}b_{14} = 18$; *ímpar*, portanto, $\det B = -18$.

8. (a) $(n-1)n!$ (cada termo $n-1$). (b) $\left(1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\right) n!$.

(c) $\frac{1}{3}(n^3 + 2n - 3)$.

11. Expansão de cofatores: $\det = 4(3) - 4(1) + 4(-4) - 4(1) = -12$.

12. $\begin{bmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB & A \\ 0 & I \end{bmatrix}$, $\det \begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{bmatrix} =$

$\det \begin{bmatrix} AB & A \\ 0 & I \end{bmatrix} = \det(AB)$. Teste $A = [1\ \ 2]$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\det \begin{bmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{bmatrix} = 5 =$

$\det(AB)$; $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = [1\ \ 2]$, $\det \begin{bmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{bmatrix} = 0 = \det(AB)$.

Singular: posto $(AB) \leq$ posto $(A) \leq n < m$.

14. $\det A = 1 + 18 + 12 - 9 - 4 - 6 = 12$, portanto, as linhas são independentes; $\det B = 0$, portanto, as linhas são dependentes (linha 1 + linha 2 = linha 3); $\det C = -1$, C tem linhas independentes.

19. Algum termo $a_{1\alpha}a_{2\beta} \ldots a_{n\omega}$ na grande fórmula não é zero! Desloque as linhas 1, 2, …, n para as linhas $\alpha, \beta, \ldots, \omega$. Então, esses as não nulos estarão na diagonal principal.

20. Cada um dos seis termos em $\det A$ é zero; o posto é, no máximo, 2; a coluna 2 não tem pivô.

21. (a) Se $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$, então quatro termos certamente são zeros.
(b) Quinze termos são zeros.

22. $4!/2 = 12$ permutações pares; $\det(I + P_{\text{par}}) = 16$ ou 4 ou 0 (16 se origina de $I + I$).

23. $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ tem −, $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ tem +, portanto, $\det A = 0$; $\det B = 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 = 48$.

26. $|B_n| = |A_n| - |A_{n-1}| = (n + 1) - n = 1$.

27. $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $AC^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4I$. Consequentemente, $A^{-1} = \frac{1}{4}C^{\mathrm{T}}$.

28. Devemos escolher os valores 1 das colunas 2 e 1, das colunas 4 e 3, e assim por diante. Portanto, n deve ser par para ter $\det A_n \neq 0$. O número de trocas é $\frac{1}{2}n$, então $C_n = (-1)^{n/2}$.

31. Alterar 3 para 2 no canto reduz o determinante F_{2n+2} por 1 vez o cofator dessa entrada. Esse cofator é o determinante de S_{n-1} (um tamanho menor), que é F_{2n}. Portanto, trocar 3 por 2 altera o determinante para $F_{2n+2} - F_{2n}$, que é F_{2n+1}.

32. $S_1 = 3$, $S_2 = 8$, $S_3 = 21$. A regra parece com cada segundo número na sequência de Fibonacci $\ldots, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$, então, a hipótese é $S_4 = 55$. Os cinco termos não nulos na grande fórmula para S_4 são (com valores 3 onde o problema 39 tem valores 2) $81 + 1 - - 9 - 9 - 9 = 55$.

36. (a) Cada $\det L = 1$; $\det U_k = \det A_k = 2, 6, -6$ para $k = 1, 2, 3$.

(b) Pivôs 5, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{6}$.

37. Os seis termos são corretos. Linha 1 − 2 linha 2 + linha 3 = 0, então a matriz é singular.

38. Com $a_{11} = 1$, a matriz $-1, 2, -1$ tem det = 1 e inversa $(A^{-1})_{ij} = n + 1 - \text{máx}(i, j)$.

40. Os cinco termos diferentes de zero em $\det A = 5$ são

$(2)(2)(2)(2) + (-1)(-1)(-1)(-1) - (-1)(-1)(2)(2) - (2)(2)(-1)(-1)$
$- (2)(-1)(-1)(2)$.

41. Subtrair 1 do valor elemento n, n subtrai seu cofator C_{nn} do determinante.
Esse cofator é $C_{nn} = 1$ (a menor matriz de Pascal). Subtrair 1 de 1 resulta em 0.

Conjunto de problemas 4.4

1. $\det A = 20$; $C^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 20 & -10 & -12 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; $AC^{\mathrm{T}} = 20I$; $A^{-1} = \dfrac{1}{20}\begin{bmatrix} 20 & -10 & -12 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

2. (a) A área desse paralelogramo é $\det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, então, o triângulo ABC tem área $\frac{1}{2}\,4 = 2$.

(b) O triângulo $A'B'C'$ tem a mesma área; ele apenas foi para a origem.

3. Os pivôs de A são 2, 3, 6 dos determinantes 2, 6, 36; os pivôs de B são 2, 3, 0.

6. (a) P^2 leva (1, 2, 3, 4, 5) para (3, 2, 5, 4, 1).
(b) P^{-1} leva (1, 2, 3, 4, 5) para (3, 4, 5, 2, 1).

7. $(x, y) = (d/(ad - bc), -c/(ad - bc))$; $(x, y, z) = (3, -1, -2)$.

10. As potências de P são todas matrizes de permutação, então, eventualmente, uma dessas matrizes deve ser repetida. Se P^r for o mesmo que P^s, então $P^{r-s} = I$.

14. (a) $\det A = 3$, $\det B_1 = -6$, $\det B_2 = 3$, portanto, $x_1 = -6/3 = -2$ e $x_2 = 3/3 = 1$.
(b) $|A| = 4$, $|B_1| = 3$, $|B_2| = -2$, $|B_3| = 1$. Então $x_1 = \frac{3}{4}$ e $x_2 = -\frac{1}{2}$ e $x_3 = \frac{1}{4}$.

15. Se a primeira coluna em A também for o lado direito b, então $\det A = \det B_1$. Tanto B_2 como B_3 são singulares, desde que uma coluna seja repetida. Consequentemente, $x_1 = |B_1|/|A| = 1$ e $x_2 = x_3 = 0$.

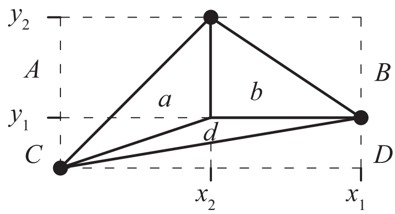
16. (a) $x_1 = \frac{3}{0}$ e $x_2 = \frac{-2}{0}$: nenhuma solução (b) $x_1 = \frac{0}{0}$ e $x_2 = \frac{0}{0}$: *não determinado*.

18. Se todos os cofatores $= 0$ (mesmo em uma única linha ou coluna), então, det $A = 0$ (nenhuma inversa). $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ não tem nenhum cofator zero, mas não é uma inversa.

23. Se det $A = 1$ e se conhecemos os cofatores, então $C^{\mathrm{T}} = A^{-1}$, assim como det $A^{-1} = 1$. Como A é a inversa de A^{-1}, A deve ser a matriz de cofatores para C.

25. Conhecendo C, o problema 22 fornece det A = (det C)$^{\frac{1}{n-1}}$ com $n = 4$. Então, podemos construir $A^{-1} = C^{\mathrm{T}}/\det A$ usando os cofatores conhecidos. Inverta para encontrar A.

26. (a) Cofatores $C_{21} = C_{31} = C_{32} = 0$.
(b) $C_{12} = C_{21}$, $C_{31} = C_{13}$, $C_{32} = C_{23}$ torna S^{-1} simétrico.

31. 

$x_1y_2 - x_2y_1$ = retângulos $A + B + D$ (não C).

Áreas do	retângulo $A = 2$ (triângulo a)
mesmas bases que o	retângulo $B = 2$ (triângulo b)
mesma altura que o	retângulo $D = 2$ (triângulo d).

Então, os triângulos $a + b + d = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$.

Verifique um exemplo com $(a, b) = (3, 2)$, $(c, d) = (1, 4)$, e área $= 10$. A linha de $(0, e)$ no passo 3 tem inclinação c/a e equação $y = e + cx/a$. O passo 3 funciona porque (b, d) está nessa linha! $d = e + cb/a$ é verdadeiro, desde que $ad - bc$ = área ae no passo 2.

32. (a) Área $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 5$. (b) $5 +$ área do novo triângulo $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 7 = 12$.

33. (a) Área $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10$. (b) Área do triângulo $= 5$. (c) Área do triângulo $= 5$.

34. As arestas do hipercubo têm comprimento $\sqrt{1 + 1 + 1 + 1} = 2$. O volume det H é $2^4 = 16$ ($H/2$ tem colunas ortonormais. Então, $\det(H/2) = 1$ leva novamente a det $H = 16$).

36. O cubo n-dimensional tem ângulos 2^n, arestas $n2^{n-1}$ e faces $2n$ de dimensão $n - 1$. O cubo, cujas arestas são as linhas de $2I$, tem volume 2^n.

37. $\begin{vmatrix} \partial r/\partial x & \partial r/\partial y \\ \partial\theta/\partial x & \partial\theta/\partial y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ (-\operatorname{sen}\theta)/r & (\cos\theta)/r \end{vmatrix} = \frac{1}{r}$.

40. $J = r$. As colunas são ortogonais e seus comprimentos módulos são 1 e r.

42. VISA tem cinco reversões VI, VS, VA, IA, SA. E AVIS tem duas reversões VI e VS. Como $5 - 2$ é ímpar, VISA e AVIS têm paridade oposta.

43. $S = (2, 1, -1)$ fornece um paralelogramo, cuja área é o comprimento módulo de um produto vetorial: $\|PQ \times PS\| = \|(-2, -2, -1)\| = 3$. Isto também surge a partir de um determinante! Os outros quatro vértices poderiam ser $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 2)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 1, 0)$. O volume da caixa inclinada é $|\det| = 1$.

44. $\det \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 0 = 7x - 5y + z$; o plano contém dois vetores.

Conjunto de problemas 5.1

1. $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$, traço 5, determinante $= 6$.

3. $\lambda = -5$ e $\lambda = -4$; ambos os λs são reduzidos por 7, com autovetores inalterados.

7. $\lambda = 3$, $\lambda = 1$, $\lambda = 0$, com autovetores $(1, 0, 0)$, $(2, -1, 0)$, $(3, -2, 1)$; traço $= 4$, det $= 0$. $\lambda = 2$, $\lambda = 2$, $\lambda = -2$, com autovetores $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, -1)$; traço $= 2$, det $= -8$.

8. $Ax = \lambda x$ fornece $(A - 7I)x = (\lambda - 7)x$; $Ax = \lambda x$ fornece $x = \lambda A - 1x$, então $A^{-1}x = (1/\lambda)x$.

9. Transponha $A - \lambda I$: $\det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)^{\mathrm{T}} = \det(A^{\mathrm{T}} - \lambda I)$.

10. O coeficiente de $(-\lambda)^{n-1}$ em $(\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$ é $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$. Em $\det(A - \lambda I)$, um termo que inclui um a_{ij} fora da diagonal exclui $a_{ii} - \lambda$ e $a_{jj} - \lambda$. Um termo assim não envolve $(-\lambda)^{n-1}$. Portanto, o coeficiente de $(-\lambda)^{n-1}$ em $\det(A - \lambda I)$ deve se originar do produto abaixo da diagonal principal. Esse coeficiente é $a_{11} + \cdots + a_{nn} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

12. Os autovalores de A são 1, 2, 3, 7, 8, 9.

13. A terceira linha contém 6, 5, 4.

14. posto $(A) = 1$, $\lambda = 0, \ldots, 0, n$ (traço n); posto $(C) = 2$, $\lambda = 0, \ldots, n/2, -n/2$ (traço 0).

17. A e A^2 e A^∞ têm os mesmos autovetores. Os autovalores são 1 e 0,5 para A, 1 e 0,25 para A^2, 1 e 0 para A^∞. Portanto, A^2 está a meio caminho entre A e A^∞.

21. (a) Multiplique Ax para constatar λx, que revela λ. (b) Resolva $(A - \lambda I)x = 0$ para encontrar x.

22. $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -1$ (verifique o traço e o determinante) com $x_1 = (1, 2)$ e $x_2 = (2, -1)$. A^{-1} possui os mesmo autovetores que A, com autovalores $1/\lambda_1 = 1/4$ e $1/\lambda_2 = -1$.

23. (a) $Pu = (uu^{\mathrm{T}})u = u(u^{\mathrm{T}}u) = u$, então $\lambda = 1$. (b) $Pv = (uu^{\mathrm{T}})v = u(u^{\mathrm{T}}v) = 0$, portanto, $\lambda = 0$. (c) $x_1 = (-1, 1, 0, 0)$, $x_2 = (-3, 0, 1, 0)$, $x_3 = (-5, 0, 0, 1)$ são ortogonais a u, então são autovetores de P com $\lambda = 0$.

24. $\lambda^3 - 1 = 0$ fornece $\lambda = 1$ e $\lambda = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$; os três autovalores são 1, 1, −1.

29. (a) posto $= 2$. (b) $\det(B^{\mathrm{T}}B) = 0$. (c) *Não.* (d) $(B + I)^{-1}$ tem $(\lambda + 1)^{-1} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

32. $a = 0, b = 9, c = 0$ multiplique $1, \lambda, \lambda^2$ em $\det(A - \lambda I) = 9\lambda - \lambda^3$: $A =$ *matriz companheira*.

36. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Sempre $A^2 =$ matriz nula se $\lambda = 0, 0$ (teorema de Cayley--Hamilton).

37. Precisamos de $\lambda^3 = 1$, mas não $\lambda = 1$ (para evitar I). Com $\lambda_1 = e^{2\pi i/3}$ e $\lambda_2 = e^{-2\pi i/3}$, o determinante será $\lambda_1\lambda_2 = 1$ e o traço é $\lambda_1 + \lambda_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} - i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = -1$. Uma matriz com este traço -1 e determinante 1 é $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

38. $Ax = c_1\lambda_1x_1 + \cdots + c_n\lambda_nx_n$ se iguala a $Bx = c_1\lambda_1x_1 + \cdots + c_n\lambda_nx_n$ para todos os x. Então, $A = B$.

39. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ c+d \end{bmatrix} = (a+b)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lambda_2 = d - b$ para produzir o traço $= a + d$.

Conjunto de problemas 5.2

3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$;

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1}$.

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$ fornece $A^{100} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^{100} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$

$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 \cdot 5^{100} + 1 & 3 \cdot 5^{100} - 3 \\ 5^{100} - 1 & 5^{100} + 3 \end{bmatrix}.$

6. $\lambda = 0, 0, 3$; a terceira coluna de S é um múltiplo de $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e as outras colunas estão no plano ortogonal a ela.

8. A_1 e A_3 não podem ser diagonalizadas. Elas têm apenas uma linha de autovetores.

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$; $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; quatro raízes quadradas.

12. (a) Verdadeiro; $\det A = 2 \neq 0$. (b) Falso; $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. (c) Falso; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ é diagonal!

13. traço(AB) = traço $(BA) = aq + bs + cr + dt$. Então, traço $(AB - BA) = 0$ (sempre). Portanto, $AB - BA = I$ é impossível para matrizes, pois I não tem traço zero.

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$

16. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$

17. (a) Falso: não conhecemos os λs. (b) Verdadeiro. (c) Verdadeiro. (d) Falso: precisamos dos autovetores de S!

23. As colunas de S são múltiplos de (2, 1) e (0, 1) em qualquer ordem. O mesmo vale para A^{-1}.

24. A e B têm $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 1$. $A + B$ tem $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Os autovalores de $A + B$ *não são iguais* aos autovalores de A mais os autovalores de B.

27. (a) Verdadeiro. (b) Falso. (c) Falso (A deve apresentar 2 ou 3 autovetores independentes).

28. $A = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ (ou outro), $A = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$; somente os autovetores são $(c, -c)$.

30. $S\Lambda^k S^{-1}$ se aproxima de zero se, e somente se, cada $|\lambda| < 1$; $B^k \to 0$ de $\lambda = 0{,}9$ e $\lambda = 0{,}3$.

32. $B^K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^K \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}.$

33. $\Lambda = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0{,}3 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; $B^{10} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = (0{,}9)^{10} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B^{10} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = (0{,}3)^{10} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$,

$B^{10} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ = soma dessas duas.

35. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ possui $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, e $A^2 - A - I$ = a matriz nula confirma o teorema de Cayley--Hamilton.

39. traço $AB = (aq + bs) + (cr + dt) = (qa + rc) + (sb + td) =$ traço BA. Prova para o caso diagonalizável: o traço de $S\Lambda S^{-1}$ é o traço de $(\Lambda S^{-1})S = \Lambda$, que é *a soma dos* λ*s*.

40. Dois problemas: o espaço nulo e o espaço-coluna podem se sobrepor, portanto, x poderia estar em ambos. Não poderá haver r autovetores independentes no espaço-coluna.

41. Os As formam um subespaço, pois cA e $A_1 + A_2$ têm o mesmo S. Quando $S = I$, os As fornecem o subespaço de matrizes diagonais. Dimensão 4.

43. Por **5F**, B tem os mesmos autovetores (1, 0) e (0, 1) como A, então B também é diagonal. As equações $AB - BA = \begin{bmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ são $-b = 0$ e $c = 0$: posto 2.

44. A tem $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = ,4$ com $x_1 = (1, 2)$ e $x_2 = (1, -1)$. A^∞ tem $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$ (mesmos autovetores). A^{100} tem $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = (0{,}4)^{100}$, que se aproxima de zero. Então, A^{100} está muito perto de A^∞.

Conjunto de problemas 5.3

2. $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A^4 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; F_{20} = 6765.$

3. Os números de Fibonacci começam com par, ímpar, ímpar. Então, *ímpar* + *ímpar* = *par*. Os dois próximos são ímpares (de ímpar + par e par + ímpar). Então, repete-se *ímpar* + *ímpar* = *par*.

4. $A = S\Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$ (observe S^{-1}).

$$S\Lambda^k S^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ------ \\ (\lambda_1^k - \lambda_2^k)/(\lambda_1 - \lambda_2) \end{bmatrix}.$$

8. A soma direta $L_k + L_{k+1}$ fornece $L_0, \ldots, L_{10}$ como 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123. Minha calculadora dá o resultado $\lambda_1^{10} = (1{,}618\ldots)^{10} = 122{,}991\ldots$, que é arredondado para $L_{10} = 123$.

10. A matriz de transição de Markov é $\begin{bmatrix} \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$. As frações $\frac{7}{12}$, $\frac{1}{2}$, 1 não se deslocam.

12. Os componentes de Ax somam-se a $x_1 + x_2 + x_3$ (cada coluna soma-se a 1 e ninguém se perde). Os componentes de λx somam-se a $\lambda(x_1 + x_2 + x_3)$. Se $\lambda \neq 1$, $x_1 + x_2 + x_3$ deve ser zero.

14. (a) $\lambda = 0$, (1, 1, −2). (b) $\lambda = 1$ e −0,2. (c) limite (3, 4, 4) = autovetor para $\lambda = 1$.

16. (a) $\begin{matrix} 0 \leq a \leq 1 \\ 0 \leq b \leq 1. \end{matrix}$

(b) $$u_k = \begin{bmatrix} b/(1-a) & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (a-b)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b/(1-a) & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \dfrac{2b}{b-a+1} - \dfrac{1-a-b}{b-a+1}(a-b)^k \\ \dfrac{2(1-a)}{b-a+1} - \dfrac{1-a-b}{b-a+1}(a-b)^k \end{bmatrix}.$$

(c) $u_k \to \begin{bmatrix} \dfrac{2b}{b-a+1} \\ \dfrac{2(1-a)}{b-a+1} \end{bmatrix}$ se $|a-b|<1$; $\quad a = 1/3$, $b = -1/3$ não de Markov.

17. $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $A^3 = 0$. Portanto, $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

18. Se A aumentar, então mais mercadorias serão consumidas na produção e a expansão deve ser mais lenta. Matematicamente, $Ax \geq tx$ permanece verdadeiro se A aumentar; $t_{\text{máx}}$ sobe.

19. $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix}$ é instável para $|\alpha| > 1/2$ e estável para $|\alpha| < 1/2$. Neutra para $\alpha = \pm 1/2$.

23. $R = S\sqrt{\Lambda}S^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ tem $R^2 = A$. $\sqrt{B}$ teria $\lambda = \sqrt{9}$ e $\lambda = \sqrt{-1}$, então, seu traço não é real. Observe que $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ pode ter $\sqrt{-1} = i$ e $-i$, além de raiz quadrada real $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

24. $A = S\Lambda_1 S^{-1}$ e $B = S\Lambda_2 S^{-1}$. Matrizes diagonais sempre fornecem $\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_2\Lambda_1$. Então $AB = BA$, a partir de $S\Lambda_1 S^{-1} S\Lambda_2 S^{-1} = S\Lambda_1\Lambda_2 S^{-1} = S\Lambda_2\Lambda_1 S^{-1} = S\Lambda_2 S^{-1} S\Lambda_1 S^{-1} = BA$.

27. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $A^k = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

29. B tem $\lambda = i$ e $-i$, então B^4 tem $\lambda^4 = 1$ e 1; C tem $\lambda = (1 \pm \sqrt{3}i)/2 = \exp(\pm\pi i/3)$, portanto, $\lambda^3 = -1$ e -1. Então, $C^{33} = -I$ e $C^{1024} = -C$.

Conjunto de problemas 5.4

1. $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 0$; $x_1 = (1, -1)$ e $x_2 = (1, 1)$;
$e^{At} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-2t}+1 & -e^{-2t}+1 \\ -e^{-2t}+1 & e^{-2t}+1 \end{bmatrix}$.

3. $u(t) = \begin{bmatrix} e^{2t}+2 \\ -e^{2t}+2 \end{bmatrix}$; à medida que $t \to \infty$, $e^{2t} \to +\infty$.

4. A_1 é instável para $t < 1$, neutramente estável para $t \geq 1$. A_2 é instável para $t < 4$, neutramente estável em $t = 4$, estável com λ real para $4 < t \leq 5$, e estável com λ complexo para $t > 5$. A_3 é instável para todos os $t > 0$, porque o traço é $2t$.

6. (a) $\lambda_1 = \frac{7+\sqrt{57}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{7-\sqrt{57}}{2}$, Re $\lambda_1 > 0$, instável. (b) $\lambda_1 = \sqrt{7}$, $\lambda_2 = -\sqrt{7}$, Re $\lambda_1 > 0$, instável (c) $\lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$, Re $\lambda_1 > 0$, instável (d) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, neutramente estável.

8. $e^{At} = I + At = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $e^{\Lambda t}u(0) = \begin{bmatrix} 4t+3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

10. (a) $e^{A(t+T)} = Se^{\Lambda(t+T)}S^{-1} = Se^{\Lambda t}e^{\Lambda T}S^{-1} = Se^{\Lambda t}S^{-1}Se^{\Lambda T}S^{-1} = e^{At}e^{AT}$.
(b) $e^A = I + A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $e^B = I + B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A + B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ fornece

$e^{A+B} = \begin{bmatrix} \cos 1 & -\text{sen } 1 \\ \text{sen } 1 & \cos 1 \end{bmatrix}$ a partir do Exemplo 3 no texto, em $t = 1$. Essa matriz é diferente de $e^A e^B$.

13. $Ax = \lambda Fx + \lambda^2 x$ ou $(A - \lambda F - \lambda^2 I)x = 0$.

18. Autovalores são reais quando $(\text{traço})^2 - 4\det \geq 0 \Rightarrow -4(-a^2 - b^2 + c^2) \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq c^2$.

19. (a) $u_1' = cu_2 - bu_3$, $u_2' = -cu_1 + au_3$, $u_3' = bu_1 - au_2$ fornece $u_1'u_1 + u_2'u_2 + u_3'u_3 = 0$. (b) Porque e^{At} é uma matriz ortogonal, $\|u(t)\|^2 = \|e^{At}u(0)\|^2 = \|u(0)\|^2$ é constante. (c) $\lambda = 0$ e $\pm(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})i$. Matrizes antissimétricas têm λs puros imaginários.

20. $u(t) = \frac{1}{2}\cos 2t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\cos\sqrt{6}t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

22. $u_1 = e^{4t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_2 = e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Se $u(0) = (5, -2)$, então $u(t) = 3e^{4t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

24. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$ tem traço 6, det 9, $\lambda = 3$ e 3, com apenas um autovetor independente $(1, 3)$. Isso fornece $y = ce^{3t}$, $y' = 3e^{3t}$. Além disso, te^{3t} resolve $y'' = 6y' - 9y$.

25. $\begin{bmatrix} y' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$. Então, $\lambda = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{41})$.

27. $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$. Agora, $v(t) = 20 + 10e^{2t} \to \infty$ como $t \to \infty$.

29. Substituir $u = e^{ct}v$ fornece $ce^{ct}v = Ae^{ct}v - e^{ct}b$, ou $(A - cI)v = b$, ou $v = (A - cI)^{-1}b =$ solução particular. Se c é um autovalor, então $A - cI$ não é invertível: este v não funciona.

32. $y(t) = \cos t$ começa em $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. A equação vetorial tem $u = (y, y') = (\cos t, -\text{sen}\, t)$.

33. A solução no tempo $t + T$ também é $e^{A(t+T)}u(0)$. Com isso, e^{At} vezes e^{AT} é igual a $e^{A(t+T)}$.

36. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, então $e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & \frac{1}{2}(e^{3t} - e^t) \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} = I$ em $t = 0$.

38. $de^{At}/dt = A + A^2t + \frac{1}{2}A^3t^2 + \frac{1}{6}A^4t^3 + \cdots = A(I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \frac{1}{6}A^3t^3 + \cdots) = Ae^{At}$.

39. Se $A^2 = A$, então $e^{At} = I + At + \frac{1}{2}At^2 + \frac{1}{6}At^3 + \cdots = I + (e^t - 1)A$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t - 1 & e^t - 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & e^t - 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

42. $\lambda = 2$ e 5 com autovetores $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Então, $A = S\Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$.

43. (a) A inversa de e^{At} é e^{-At}. (b) Se $Ax = \lambda x$, então $e^{At}x = e^{\lambda t}x$ e $e^{\lambda t} \neq 0$.

Conjunto de problemas 5.5

1. (b) soma $= 4 + 3i$; produto $= 7 + i$. (c) $\overline{3 + 4i} = 3 - 4i$; $\overline{1 - i} = 1 + i$; $|3 + 4i| = 5$; $|1 - i| = \sqrt{2}$. Ambos os números permanecem *fora* do círculo trigonométrico unitário.

2. $C = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & i & -i \\ -i & 1 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C^{\mathrm{H}} = C$ porque $(A^{\mathrm{H}}A)^{\mathrm{H}} = A^{\mathrm{H}}A$.

3. (a) $x^2 = r^2e^{i2\theta}$, $x^{-1} = (1/r)e^{-i\theta}$, $\overline{x} = re^{-i\theta}$; $x^{-1} = \overline{x}$ fornece $|x|^2 = 1$: no círculo trigonométrico unitário.

4. $P: \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ x_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix},\ x_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix};$

$Q: \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ x_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix},\ x_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix};$

$R: \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = -5,\ x_1 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix},\ x_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$

7. (a) $\det A^{\mathrm{T}} = \det A$, mas $\det A^{\mathrm{H}} = \overline{\det A}$. (b) $A^{\mathrm{H}} = A$ fornece $\overline{\det A} = \det A =$ real.

8. $\bar{x} = 2 - i, x\bar{x} = 5, xy = -1 + 7i, 1/x = 2/5 - (1/5)i, x/y = 1/2 - (1/2)i$; verifique se $|xy| = \sqrt{50} = |x||y|$ e $|1/x| = 1/\sqrt{5} = 1/|x|$.

14. (a) u, v, w são ortogonais entre si. (b) O espaço nulo é gerado por u; o espaço nulo esquerdo é o mesmo que o espaço nulo; o espaço-linha é gerado por v e w; o espaço-coluna é o mesmo que o espaço-linha. (c) $x = v + \frac{1}{2}w$; não exclusivo, podemos adicionar qualquer múltiplo de u a x. (d) Precisamos de $b^{\mathrm{T}}u = 0$. (e) $S^{-1} = S^{\mathrm{T}}$; $S^{-1}AS = \mathrm{diag}(0, 1, 2)$.

15. $(UV)^{\mathrm{H}}(UV) = V^{\mathrm{H}}U^{\mathrm{H}}UV = V^{\mathrm{H}}I\,V = I$. Portanto, UV é uma matriz unitária.

16. A terceira coluna de U pode ser $(1, -2, i)/\sqrt{6}$, multiplicada por qualquer número $e^{i\theta}$.

19. A dimensão de S é $n(n+1)/2$, não n. Cada matriz simétrica A é uma combinação de n projeções, mas as projeções mudam à medida que A muda. Não há nenhuma base de n matrizes de projeção fixa no espaço **S** de matrizes simétricas.

21. As colunas da matriz de Fourier U são autovetores de P, porque $PU = \mathrm{diag}(1, w, w^2, w^3)U$ (e $w = i$).

22. $A^{\mathrm{H}}A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1+i \\ 0 & 2 & 1+i \\ 1-i & 1-i & 2 \end{bmatrix}$ e $AA^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ são matrizes hermitianas.

$(A^{\mathrm{H}}A)^{\mathrm{H}} = A^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{HH}} = A^{\mathrm{H}}A$ novamente.

23. n^2 passos para C direto vezes x; somente $(n \log n)$ passos para F e F^{-1} por FFT (e n para Λ).

24. $P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, P^3 = I, P^{100} = P^{99}P = P$; $\lambda =$ raízes cúbicas de $1 = 1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}$.

25. cA ainda é hermitiano para c real; $(i\,A)^{\mathrm{H}} = -i\,A^{\mathrm{H}} = -i\,A$ é anti-hermitiano.

26. A tem $+1$ ou -1 em cada valor elemento diagonal; oito possibilidades.

33. $A = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & -1+i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ -1-i & 1 \end{bmatrix}.$

$K = (iA^{\mathrm{T}}) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & -1-i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ -1+i & 1 \end{bmatrix}.$

38. Obtemos $A + iB = (A + iB)^{\mathrm{H}} = A^{\mathrm{T}} - iB^{\mathrm{T}}$. Então, $A = A^{\mathrm{T}}$ e $B = -B^{\mathrm{T}}$.

39. $(I - 2uu^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}} = I - 2uu^{\mathrm{H}}$; $(I - 2uu^{\mathrm{H}})^2 = I - 4uu^{\mathrm{H}} + 4u(u^{\mathrm{H}}u)u^{\mathrm{H}} = I$; a matriz uu^{H} projeta-se na linha através de u.

40. $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} = 2 + 5P + 4P^2$ tem $\lambda(C) = \begin{Bmatrix} 2+5+4 \\ 2 + 5e^{2\pi i/3} + 4e^{4\pi i/3} \\ 2 + 5e^{4\pi i/3} + 4e^{8\pi i/3} \end{Bmatrix}.$

41. $A = \begin{bmatrix} 1-i & 1-i \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2+2i & -2 \\ 1+i & 2 \end{bmatrix} = S\Lambda S^{-1}$. Autovalores reais 1 e 4.

42. $V = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & -1+i \\ 1+i & 1+\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-i \\ -1-i & 1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$ com $L^2 = 6 + 2\sqrt{3}$.

$V = V^{\mathrm{H}}$ fornece λ real, a unitária fornece $|\lambda| = 1$ e, então, o traço zero fornece $\lambda = 1, -1$.

45. Não multiplique e^{-ix} por e^{ix}; una o primeiro, então $\int_0^{2\pi} e^{2ix}\,dx = [e^{2ix}/2i]_0^{2\pi} = 0$.

48. $[1]$ e $[-1]$; $\begin{bmatrix} a & b+ic \\ b-ic & -a \end{bmatrix}$ com $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

49. $R + iS = (R + iS)^{\mathrm{H}} = R^{\mathrm{T}} - iS^{\mathrm{T}}$; R é simétrica, porém S é antissimétrica.

Conjunto de problemas 5.6

1. Se B é inversível, então $BA = B(AB)B^{-1}$ é similar a AB.

2. Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são autovalores de A, então $\lambda_1 + 1, \ldots, \lambda_n + 1$ são autovalores de $A + I$. Portanto, A e $A + I$ nunca apresentam os mesmos autovalores e não podem ser similares.

4. $C = N^{-1}BN = N^{-1}M^{-1}AMN = (MN)^{-1}A(MN)$; somente $M^{-1}IM = I$ é similar a I.

5. O valor elemento (3, 1) de $M^{-1}AM$ é $g \cos\theta + h$ sen θ, que é zero se $\tan\theta = -g/h$.

9. Os coeficientes são $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $d_1 = 1$, $d_2 = 1$; verifique $Mc = d$.

11. A matriz de reflexão com base v_1 e v_2 é $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. As bases V_1 e V_2 (mesma reflexão!) fornecem $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Se $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, então $A = MBM^{-1}$.

13. Os autovalores são 1, 1, 1, −1. Matrizes de autovalores $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

16. (a) $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (b) $D^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ = terceira matriz derivada. As terceiras derivadas de 1, x e x^2 são nulas, então $D^3 = 0$. (c) $\lambda = 0$ (triplo); somente um autovetor independente (1, 0, 0).

18. (a) $TT^{\mathrm{H}} = U^{-1}AUU^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}(U^{-1})^{\mathrm{H}} = I$. (b) Se T é triangular e unitária, então seus valores diagonais (os autovalores) devem ter valor absoluto 1. Desse modo, todos os valores fora da diagonal são nulos, pois as colunas devem ser vetores unitários.

19. Se $N = U\Lambda U^{-1}$, então $NN^{\mathrm{H}} = U\Lambda U^{-1}(U^{-1})^{\mathrm{H}}\Lambda^{\mathrm{H}}U^{\mathrm{H}}$ é igual a $U\Lambda\Lambda^{\mathrm{H}}U^{\mathrm{H}}$.
Isto é o mesmo que $U\Lambda^{\mathrm{H}}\Lambda U^{\mathrm{H}} = (U\Lambda U^{-1})^{\mathrm{H}}(U\Lambda U^{-1}) = N^{\mathrm{H}}N$. Então, N é normal.

21. Os valores 1, 1 de $T^{\mathrm{H}}T = TT^{\mathrm{H}}$ fornecem $|t_{11}|^2 = |t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + |t_{13}|^2$, portanto, $t_{12} = t_{13} = 0$. Ao comparar os valores 2, 2 de $T^{\mathrm{H}}T = TT^{\mathrm{H}}$ fornece $t_{23} = 0$. Portanto, T deve ser diagonal.

22. Os autovalores de $A(A - I)(A - 2I)$ são 0, 0, 0.

24. Sempre $\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix} - (a+d)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + (ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$!

30. $M^{-1}J_3M = 0$, de modo que as duas últimas desigualdades sejam fáceis. Tentar estabelecer a condição $MJ_1 = J_2M$ faz com que a primeira coluna de M seja zero, então M não pode ser invertível. Não pode ter $J_1 = M^{-1}J_2M$.

31. $A^{10} = 2^{10}\begin{bmatrix} 61 & 45 \\ -80 & -59 \end{bmatrix}$; $e^A = e^2\begin{bmatrix} 13 & 9 \\ -16 & -11 \end{bmatrix}$.

32. (a) $(M^{-1}AM)(M^{-1}x) = M^{-1}(Ax) = M^{-1}0 = 0$. (b) Os espaços nulos de A e de $M^{-1}AM$ têm a mesma *dimensão*. Diferentes vetores e diferentes bases.

34. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, são similares; $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ por si própria e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ por si própria.

35. (a) Escolha M_i = matriz diagonal reversa para obter $M_i^{-1} J_i M_i = M_i^{\mathrm{T}}$ em cada bloco
(b) M_0 tem esses blocos M_i em sua diagonal para obter $M_0^{-1} JM_0 = J^{\mathrm{T}}$.
(c) $A^{\mathrm{T}} = (M^{-1})^{\mathrm{T}} J^{\mathrm{T}} M^{\mathrm{T}}$ é $(M^{-1})^{\mathrm{T}} M_0^{-1} JM_0 M^{\mathrm{T}} = (MM_0M^{\mathrm{T}})^{-1}A(MM_0M^{\mathrm{T}})$ e A^{T} é similar a A.

38. $J^2 = \begin{bmatrix} c^2 & 2c \\ 0 & c^2 \end{bmatrix}, J^3 = \begin{bmatrix} c^3 & 3c^2 \\ 0 & c^3 \end{bmatrix}, J^k = \begin{bmatrix} c^k & kc^{k-1} \\ 0 & c^k \end{bmatrix}; J^0 = I, J^{-1} = \begin{bmatrix} c^{-1} & -c^{-2} \\ 0 & c^{-1} \end{bmatrix}$.

39. $w(t) = (w(0) + tx(0) + \frac{1}{2}t^2\, y(0) + \frac{1}{6}t^3 z(0))e^{5t}$.

42. Diagonais 6 por 6 e 4 por 4; AB tem todos os mesmos autovalores que BA mais zeros $6 - 4$.

43. (a) Verdadeiro: um tem $\lambda = 0$, o outro não. (b) Falso. Diagonalize uma matriz não simétrica e Λ é simétrico. (c) Falso: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ são similares. (d) Verdadeiro: todos os autovalores de $A + I$ aumentam em 1, portanto, são diferentes dos autovalores de A.

Conjunto de problemas 6.1

2. $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = 0$ fornece $\lambda_1 = ((a + c) + \sqrt{(a - c)^2 + b^2}) / 2$ e $\lambda_2 = ((a + c) - \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2})/2)$; $\lambda_1 > 0$ é uma soma de números positivos; $\lambda_2 > 0$ porque $(a + c)^2 > (a - c)^2 + 4b^2$ é reduzida para $ac > b^2$.
Uma forma melhor: produto $\lambda_1\lambda_2 = ac - b^2$.

3. (a) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 11 \end{bmatrix}$.
(b) $f_1 = (x_1 - x_2 - x_3)^2 = 0$, quando $x_1 - x_2 - x_3 = 0$.
(c) $f_2 = (x_1 - x_2 - x_3)^2 + (x_2 - 3x_3)^2 + x_3^{\,2}$; $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

5. $ac - b^2 = 2 - 4 = -2 < 0$; $x^2 + 4xy + 2y^2 = (x + 2y)^2 - 2y^2$ (diferença de quadrados).

6. $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; os coeficientes dos quadrados são os pivôs em D, ao passo que os coeficientes dentro dos quadrados são colunas de L.

7. (a) Definida positiva e quando $-3 < b < 3$.
(b) $\begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 - b^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) O mínimo é $-\dfrac{1}{2(9-b^2)}$ quando $\begin{bmatrix}1 & b\\ b & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$, que é $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\dfrac{1}{9-b^2}\begin{bmatrix}-b\\ 1\end{bmatrix}$.

(d) Nenhum mínimo, seja $y \to \infty$, $x = -3y$, então $x - y$ aproxima-se de $-\infty$.

9. (a) Os pivôs são a e $c - |b|^2/a$ e $\det A = ac - |b|^2$. (b) Multiplique $|x_2|^2$ por $(c - |b|^2/a)$. (c) Agora $x^H Ax$ é uma soma de quadrados. (d) $\det = -1$ (indefinida) e $\det = +1$ (definida positiva).

12. $a > 1$ e $(a-1)(c-1) > b^2$. Isso significa que $A - I$ é definida positiva.

14. $x^T A^T Ax = (Ax)^T(Ax) =$ comprimento elevado ao quadrado $= 0$ somente se $Ax = 0$. Como A tem colunas independentes, isto acontece apenas quando $x = 0$.

18. $f(x, y) = x^2 + 4xy + 9y^2 = (x + 2y)^2 + 5y^2$; $f(x, y) = x^2 + 6xy + 9y^2 = (x + 3y)^2$.

19. $ax^2 + 2bxy + cy^2$ tem um ponto de sela em $(0, 0)$ se $ac < b^2$. A matriz é *indefinida* ($\lambda < 0$ e $\lambda > 0$).

21. $A = \begin{bmatrix}4 & -4 & 8\\ -4 & 4 & -8\\ 8 & -8 & 16\end{bmatrix}$ tem apenas um pivô $= 4$, posto $= 1$, autovalores 24, 0, 0, $\det A = 0$.

Conjunto de problemas 6.2

2. A é definida positiva para $a > 2$. B nunca é definida positiva: observe $\begin{bmatrix}1 & 4\\ 4 & 7\end{bmatrix}$.

3. Se $x^T Ax > 0$ e $x^T Bx > 0$ para qualquer $x \neq 0$, então $x^T(A + B)x > 0$; condição (I).

4. $\det A = -2b^3 - 3b^2 + 1$ é negativa em (e próximo de) $b = \frac{2}{3}$.

5. λs positivos porque R é simétrica e $\sqrt{\Lambda} > 0$. $R = \begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$; $R = \begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$.

8. $A = \begin{bmatrix}3 & -\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 2\end{bmatrix}$ tem $\lambda = 1$ e 4, eixos $1\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{bmatrix}$ e $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ -1\end{bmatrix}$ ao longo dos autovetores.

10. *As matrizes definidas negativas*: (I) $x^T Ax < 0$ para todos os vetores diferentes de zero x. (II) Todos os autovalores de A satisfazem $\lambda_i < 0$. (III) $\det A_1 < 0$, $\det A_2 > 0$, $\det A_3 < 0$. (IV) Todos os pivôs (sem trocas de linhas) satisfazem $\lambda d_i < 0$. (V) Há uma matriz R com colunas independentes tais como $A = -R^T R$.

11. $|x^T Ay|^2 = |x^T R^T Ry|^2 = |(Rx)^T Ry|^2 \leq$ (pela desigualdade comum de Schwarz) $||Rx||^2||Ry||^2 = (x^T R^T Rx)(y^T R^T Ry) = (x^T Ax)(y^T Ay)$.

15. Falso (Q deve conter autovetores de A); Verdadeiro (os mesmos autovalores que A); Verdadeiro ($Q^T AQ = Q^{-1}AQ$ é similar a A); Verdadeiro (autovalores de e^{-A} são $e^{-\lambda} > 0$).

16. $x^T Ax$ não é positiva quando $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 0)$ por causa do zero na diagonal.

19. (a) A matriz definida positiva exige determinante positivo (além disso, todos $\lambda > 0$). (b) Todas as matrizes de projeção I são singulares. (c) Os valores diagonais de D são seus autovalores. (d) A matriz definida negativa $-I$ tem $\det = +1$ quando n é par.

20. Começa com $a_{jj} =$ (linha j de R^T)(coluna j de R) $=$ comprimento elevado ao quadrado da coluna j de R. Então, $\det A = (\det R)^2 =$ (volume do paralelepípedo $R)^2 \leq$ produto dos comprimentos ao quadrado de todas as colunas de R. Esse produto é $a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

23. $\lambda_1 = 1/a^2$ e $\lambda_2 = 1/b^2$, então, desse modo, $a = 1/\sqrt{\lambda_1}$ e $b = 1/\sqrt{\lambda_2}$. A elipse $9x^2 + 16y^2 = 1$ tem eixos com meios comprimentos $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{1}{4}$.

25. $A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}$ tem pivôs $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$; $A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$ é singular;

$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$.

26. $A=\begin{bmatrix}9&3\\3&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}2&0\\4&3\end{bmatrix}$ tem $CC^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}4&8\\8&25\end{bmatrix}$.

28. $x^{\mathrm{T}}Ax=2\left(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{2}(x_2-x_3)^2$; $x^{\mathrm{T}}Bx=(x_1+x_2+x_3)^2$. B tem um pivô.

29. A e $C^{\mathrm{T}}AC$ tem $\lambda_1>0$, $\lambda_2=0$. $C(t)=tQ+(1-t)QR$, $Q=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$, $R=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$; C um autovalor positivo e um negativo, mas I tem dois autovalores positivos.

31. $ax^2+2bxy+cy^2=a(x+\frac{b}{a}y)^2+\frac{ac-b^2}{a}y^2$; $2x^2+8xy+10y^2=2(x+2y)^2+2y^2$.

36. posto $(C^{\mathrm{T}}AC)\leq$ posto A, mas também posto $(C^{\mathrm{T}}AC)\geq$ posto $((C^{\mathrm{T}})^{-1}C^{\mathrm{T}}ACC^{-1})=$ posto A.

38. *Grupos*: matrizes ortogonais; e^{tA} para todos os t; todas as matrizes com det $=1$. Se A é definida positiva, o grupo de todas as potências A^k contém somente matrizes definidas positivas.

39. Os pivôs de $A-\frac{1}{2}I$ são 2,5, 5,9, −0,81, então um autovalor de $A-\frac{1}{2}I$ é negativo. Então A tem um autovalor menor que $\frac{1}{2}$.

40. Não. Se C não é quadrada, $C^{\mathrm{T}}AC$ não é uma matriz da mesma dimensão que A.

43. $\det\begin{bmatrix}6-4\lambda/18&-3-\lambda/18\\-3-\lambda/18&6-4\lambda/18\end{bmatrix}=0$ fornece $\lambda_1=54$, $\lambda_2=\frac{54}{5}$.

Autovetores $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

Conjunto de problemas 6.3

2. $A^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix}5&20\\20&80\end{bmatrix}$ tem apenas $\sigma_1^2=85$ com $v_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{17}\\4/\sqrt{17}\end{bmatrix}$, então $v_2=\begin{bmatrix}4/\sqrt{17}\\-1/\sqrt{17}\end{bmatrix}$.

3. $AA^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$ tem $\sigma_1^2=3$, com $u_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$, e $\sigma_2^2=1$, com $u_2=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$.

$A^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}$ tem $\sigma_1^2=3$, com $v_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{bmatrix}$, $\sigma_2^2=1$, com $v_2=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$,

e vetor nulo $v_3=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$.

Então $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1&u_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1&v_2&v_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

4. $A^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$ tem autovalores $\sigma_1^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $\sigma_2^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Como $A = A^T$, os autovetores de A^TA são os mesmos para A. Como $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ é *negativa*, $\sigma_1 = \lambda_1$, mas $\sigma_2 = -\lambda_2$. Os autovetores unitários são os mesmos que na seção 6.2 para A, exceto para o efeito deste sinal de subtração (porque precisamos de $Av_2 = \sigma_2 u_2$):

$$u_1 = v_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1/\sqrt{1+\lambda_1^2} \\ 1/\sqrt{1+\lambda_1^2} \end{bmatrix} \text{ e } u_2 = -v_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2/\sqrt{1+\lambda_2^2} \\ 1/\sqrt{1+\lambda_2^2} \end{bmatrix}.$$

7. Multiplique $U\Sigma V^T$ utilizando as colunas (de U) multiplicadas pelas linhas (de ΣV^T).

8. $A = 12\, uv^T$ tem um valor singular $\sigma_1 = 12$.

12. Os valores singulares de $A + I$ não são $\sigma_j + 1$. Eles surgem dos autovalores de $(A + I)^T (A + I)$.

13. Para tornar A singular, a menor alteração define seu menor valor singular σ_2 para zero.

14. $A^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

A^+ é a inversa à direita de A; B^+ é a inversa à esquerda de B.

15. Tome $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Então, $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. A partir de C^+ no problema 15 temos $A^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$, $B^+ = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = (AB)^+$, e $(AB)^+ \neq B^+A^+$.

16. (a) Com colunas independentes, o espaço-linha é $\mathbf{R}^n$ por completo; verifique $(A^TA)\, A^+b = A^Tb$. (b) $A^T(AA^T)^{-1}b$ está no espaço-linha porque A^T vezes qualquer vetor está neste espaço; agora $(A^TA)A^+b = A^TAA^T(AA^T)^{-1}b = A^Tb$. Os dois casos fornecem $A^TAx^+ = A^Tb$.

19. $A = Q_1\Sigma Q_2^T \Rightarrow A^+ = Q_2\Sigma^+Q_1^T \Rightarrow AA^+ = Q_1\Sigma\Sigma^+Q_1^T$. Elevar ao quadrado fornece $(AA^+)^2 = Q_1\Sigma\Sigma^+\Sigma\Sigma^+Q_1^T = Q_1\Sigma\Sigma^+Q_1^T$. Então temos as seguintes projeções: $(AA^+)^2 = AA^+ = (AA^+)^T$ e, de maneira similar para A^+A. AA^+ e A^+A projetam-se no espaço-coluna e espaço-linha de A.

20. $A^TA = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, tome as raízes quadradas de 4 e 16 para obter $S = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $Q = AS^{-1} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Conjunto de problemas 6.4

1. $P(x) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 - 4x_1 - 4x_3$ tem $\partial P/\partial x_1 = 2x_1 - x_2 - 4$, $\partial P/\partial x_2 = -x_1 + 2x_2 - x_3$, e $\partial P/\partial x_3 = -x_2 + 2x_3 - 4$.

2. $\partial P_1/\partial x = x + y = 0$ e $\partial P_1/\partial y = x + 2y - 3 = 0$ fornecem $x = -3$ e $y = 3$. P_2 não tem mínimo (seja $y \to \infty$). Ele é associado com a matriz semidefinida $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Coloque $x = (1, \ldots, 1)$ no quociente de Rayleigh (o denominador torna-se n). Como $R(x)$ está sempre entre λ_1 e λ_n, obtemos $n\lambda_1 \leq x^TAx =$ *soma de todos os* $a_{ij} \leq n\lambda_n$.

4. Como $x^TBx > 0$ para todos os vetores não nulos x, $x^T(A + B)x$ será maior que x^TAx. Portanto, o quociente de Rayleigh é maior para $A + B$ (na realidade, todos os n autovalores aumentam).

5. Como $x^{\mathrm{T}}Bx > 0$, o quociente de Rayleigh para $A + B$ é maior que o quociente para A.

6. Os menores autovalores em $Ax = \lambda x$ e $Ax = \lambda Mx$ são $\frac{1}{2}$ e $(3 - \sqrt{3})/4$.

7. (a) $\lambda j = \text{mín}_{Sj}\,[\text{máx}_{x \text{ em } Sj}\, R(x)] > 0$ significa que todo S_j contém um vetor x com $R(x) > 0$.

(b) $y = C^{-1}x$ fornece o quociente $\overline{R}(y) = \dfrac{y^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}ACy}{y^{\mathrm{T}}y} = \dfrac{x^{\mathrm{T}}Ax}{x^{\mathrm{T}}x} = R(x) > 0.$

16. Se $Cx = C(A^{-1}b)$ se iguala a d, então $CA^{-1}b - d$ é zero no termo de correção na equação (5).

17. O subespaço extremo S_2 é atravessado pelos autovetores x_1 e x_2.

Conjunto de problemas 6.5

1. Integre por partes: $\int_0^1 -V_i''\,V_j\,dx = \int_0^1 V_i'V_j'\,dx - \left[V_i'\,V_j\right]_{x=0}^{x=1} = \int_0^1 V_i'V_j'\,dx =$ mesmo A_{ij}.

2. $A_{33} = 3$, $b_3 = \frac{1}{3}$. Então $A = 3\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $Ay = b$ fornece

$$y = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

5. $A = 4$, $M = \frac{1}{3}$. Sua razão 12 (quociente de Rayleigh no subespaço de múltiplos de $V(x)$) é *maior* que o verdadeiro autovalor $\lambda = \pi^2$.

6. A matriz de massa M é de $h/6$ vezes a matriz tridiagonal 1, 4, 1.

7. $Ay = b$ é $4\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/16 \\ 4/16 \\ 3/16 \end{bmatrix} = b = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$. O elemento finito linear $U = \frac{3}{16}V_1 + \frac{4}{16}V_2 + \frac{3}{16}V_3$ se iguala ao u exato $= \frac{3}{16}, \frac{4}{16}, \frac{3}{16}$ nos nós $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$.

Conjunto de problemas 7.2

4. $\|ABx\| \le \|A\|\,\|Bx\|$, pela definição da norma de A, e, então, $\|Bx\| \le \|B\|\,\|x\|$. Dividindo por $\|x\|$ e maximizando, $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$. O mesmo é verdadeiro para a inversa, $\|B^{-1}A^{-1}\| \le$ $\le \|B^{-1}\|\,\|A^{-1}\|$; $c(AB) \le c(A)\,c(B)$ por meio da multiplicação dessas desigualdades.

5. Se Q é ortogonal, sua norma é $\|Q\| = \text{máx}\ \|Qx\|/\|x\| = 1$ porque Q preserva o módulo: $\|Qx\| = \|x\|$ para cada x. Além disso, Q^{-1} é ortogonal e tem norma um, portanto, $c(Q) = 1$.

6. (a) Sim, $c(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\| = c(A^{-1})$, desde que $(A^{-1})^{-1}$ seja A novamente. (b) $A^{-1}b = x$ leva a $\dfrac{\|\delta b\|}{\|b\|} \le \|A\|\,\|A^{-1}\|\,\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|}$. Este é $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|} \ge \dfrac{1}{c}\,\dfrac{\|\delta b\|}{\|b\|}$.

9. Na definição, $\|A\| = \text{máx.}\ \|Ax\|/\|x\|$, escolha x como autovetor particular na pergunta; $\|Ax\| = |\lambda|\,\|x\|$, portanto, a razão é $|\lambda|$ e a razão *máxima* é $|\lambda|$, *pelo menos*.

10. $A^{\mathrm{T}}A$ e AA^{T} têm os mesmos autovalores, desde que $A^{\mathrm{T}}Ax = \lambda x$ forneça $AA^{\mathrm{T}}(Ax) = A(A^{\mathrm{T}}Ax) =$ $= \lambda(Ax)$. A igualdade dos autovalores maiores significa que $\|A\| = \|A^{\mathrm{T}}\|$.

11. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_{\text{máx}}(A + B) > \lambda_{\text{máx}}(A) + \lambda_{\text{máx}}(B)$ (desde que $1 > 0 + 0$), e $\lambda_{\text{máx}}(AB) > \lambda_{\text{máx}}(A)\lambda_{\text{máx}}(B)$. Portanto, $\lambda_{\text{máx}}(A)$ não é uma norma.

14. $b - Ay = (10^{-7}, 0)$ residual é muito menor que $b - Az = (0{,}0013,\ 0{,}0016)$. Mas z está muito mais próximo da solução que y.

16. Se $\lambda_{\text{máx}} = \lambda_{\text{mín}} = 1$, então todos os $\lambda_i = 1$ e $A = SIS^{-1} = I$. As únicas matrizes com $\|A\| = \|A^{-1}\| = 1$ são *matrizes ortogonais*, porque $A^{\mathrm{T}}A$ deve ser I.

17. $\|A\| = 2$ e $c = 1$; $\|A\| = \sqrt{2}$ e c é infinita (singular !); $\|A\| = \sqrt{2}$ e $c = 1$.

18. $x_1^2 + \cdots + x_n^2$ não é menor que $\text{máx}(x_i^2) = (\|x\|_\infty)^2$ e não é maior que $(|x_1| + \cdots + |x_n|)^2$, que é $(\|x\|_1)^2$. Certamente $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \le n\ \text{máx}(x_i^2)$, portanto $\|x\| \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$. Escolha $y =$ (sinal x_1, sinal x_2, …, sinal x_n) para obter $x \cdot y = \|x\|_1$. De acordo com o teorema de Schwarz, este é no máximo $\|x\|\ \|y\| = \sqrt{n}\|x\|$. Escolha $x = (1, 1, \ldots, 1)$ para as razões máximas $\sqrt{n}$.

22. A inversa exata de uma matriz de Hilbert 3 por 3 é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$.

23. Troque $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = U$ com $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}.\ A \to \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U.$$

Então $PA = LU$ com $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$.

24. O maior $\|x\| = \|A^{-1}b\|$ é $1/\lambda_{\text{mín}}$; o maior erro é $10^{-16}/\lambda_{\text{mín}}$.

Conjunto de problemas 7.3

1. $u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 14 \\ -13 \end{bmatrix}$; $u_\infty = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ normalizado para o vetor unitário.

2. $u_k/\lambda_1^k = c_1x_1 + c_2x_2(\lambda_2/\lambda_1)^k + \cdots + c_nx_n(\lambda_n/\lambda_1)^k \to c_1x_1$ se todas as razões $|\lambda_i/\lambda_1| < 1$. A maior razão controla, quando k é grande. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ tem $|\lambda_2| = |\lambda_1|$ e não possui nenhuma convergência.

3. $Hx = x - (x - y)\dfrac{2(x - y)^{\mathrm{T}}x}{(x - y)^{\mathrm{T}}(x - y)} = x - (x - y) = y$. Então $H(Hx) = Hy$ é $x = Hy$.

5. $\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & 0 \end{bmatrix} = QR = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \cos\theta\operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix}$.

Então $RQ = \begin{bmatrix} c(1 + s^2) & -\boldsymbol{s}^3 \\ -\boldsymbol{s}^3 & -s^2c \end{bmatrix}$.

9. *Suponha* que $(Q_0 \cdots Q_{k-1})(R_{k-1} \cdots R_0)$ seja a fatoração QR de A^k (certamente verdadeiro se $k = 1$). Pela construção, $A_{k+1} = R_kQ_k$, portanto, $R_k = A_{k+1}Q_k^{\mathrm{T}} = (Q_k^{\mathrm{T}} \cdots Q_0^{\mathrm{T}}AQ_0 \cdots Q_k)Q_k^{\mathrm{T}}$. Multiplicando posteriormente por $(R_{k-1} \cdots R_0)$, a suposição fornece $R_k \cdots R_0 = Q_k^{\mathrm{T}} \cdots Q_0^{\mathrm{T}}A^{k+1}$. Após deslocar os Qs para o lado esquerdo, este é o resultado exigido para A^{k+1}.

10. $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = U^{-1}$ e então $U^{-1}AU = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -5 & \frac{9}{25} & \frac{12}{25} \\ 0 & \frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{bmatrix}$.

15. A tem autovalores 4 e 2. Coloque um autovetor na *linha* 1 de P: é

$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ou $\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

16. $P_{ij} A$ utiliza $4n$ multiplicações (2 para cada valor nas linhas i e j). Ao fatorar o $\cos\theta$, os elementos 1 e $\pm \tan\theta$ precisam apenas de multiplicações $2n$, o que leva a $\frac{2}{3}n^3$ para PR.

Conjunto de problemas 7.4

1. $Ax_k = (2 - 2\cos k\pi h)x_k$; $Jx_k = \frac{1}{2}(\text{sen } 2k\pi h, \text{sen } 3k\pi h + \text{sen } k\pi h, \ldots) = (\cos k\pi h)x_k$. Para $h = \frac{1}{4}$, A tem autovalores $2 - 2\cos\frac{\pi}{4} = \mathbf{2} - \sqrt{\mathbf{2}}$, $2 - \cos\frac{\pi}{2} = \mathbf{2}$, $2 - 2\cos\frac{3\pi}{4} = \mathbf{2} + \sqrt{\mathbf{2}}$.

2. $D^{-1}(-L-U) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$, autovalores $\mu = 0, \ \pm 1/\sqrt{2}$; $(D+L)^{-1}(-U) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$,

autovalores 0, 0, 1 / 2; $\omega_{\text{opt}} = 4 - 2\sqrt{2}$, reduzindo $\lambda_{\text{máx}}$ para $3 - 2\sqrt{2} \approx 0{,}2$.

5. $J = D^{-1}(L+U) = -\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}$; os três círculos têm raio $r_1 = \frac{2}{3}$, $r_2 = \frac{1}{4}$, $r_3 = \frac{4}{5}$. Seus centros estão em zero, então todos os $|\lambda_i| \leq 4/5 < 1$.

8. Se $Ax = \lambda x$, então $(I - A)x = (1 - \lambda)x$. Os autovalores reais de $B = I - A$ têm $|1 - \lambda| < 1$, contanto que λ esteja entre 0 e 2.

10. Sempre $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$. Escolha $A = B$ para encontrar $\|B^2\| \leq \|B\|^2$. Então, escolha $A = B^2$ para encontrar $\|B^3\| \leq \|B^2\|\,\|B\| \leq \|B\|^3$. Continue (ou use a indução). Como $\|B\| \geq$ máx $|\lambda(B)|$, não é nenhuma surpresa que $\|B\| < 1$ forneça a convergência.

11. $-D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -b/a \\ -c/d & 0 \end{bmatrix}$ tem $\mu = \pm \left(\frac{bc}{ad}\right)^{1/2}$;

$-(D+L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & -b/a \\ 0 & bc/ad \end{bmatrix}$, $\lambda = 0,\ bc/ad$; $\lambda_{\text{máx}}$ se iguala a $\mu^2_{\text{máx}}$.

13. Super-relaxamento sucessiva (SOR) em MATLAB.

15. As somas de linhas máximas fornecem todos os $|\lambda| \leq 0{,}9$ e $|\lambda_i| \leq 4$. Os círculos em torno dos valores diagonais fornecem limites mais rígidos. Primeira matriz A: O círculo $|\lambda - 0{,}2| \leq 0{,}7$ contém os outros círculos $|\lambda - 0{,}3| \leq 0{,}5$ e $|\lambda - 0{,}1| \leq 0{,}6$, além de todos os três autovalores. Segunda matriz A: O círculo $|\lambda - 2| \leq 2$ contém o círculo $|\lambda - 2| \leq 1$ e todos os três autovalores $2 + \sqrt{2}$, 2, além de $2 - \sqrt{2}$.

17. Jacobi apresenta $S^{-1}T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ com $|\lambda|_{\text{máx}} = \frac{1}{3}$. Gauss–Seidel demonstra

$S^{-1}T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$ com $|\lambda|_{\text{máx}} = \frac{1}{9} = (|\lambda|_{\text{máx}}\text{ para Jacobi})^2$.

18. $r_1 = b - \alpha_1 Ab = b - (b^T b/b^T Ab)Ab$ é ortogonal a $r_0 = b$: *os resíduos* $\mathrm{r} = \mathrm{b} - \mathrm{Ax}$ *são ortogonais em cada passo*. Isso demonstra que p_1 é ortogonal para $Ap_0 = Ab$, simplifica p_1 para cP_1: $P_1 = \|Ab\|^2 b - (b^T Ab)Ab$ e $c = b^T b/(b^T Ab)^2$. Certamente $(Ab)^T P_1 = 0$, porque $A^T = A$ (essa simplificação coloca α_1 em $p_1 = b - \alpha_1 Ab + (b^T b - 2\alpha_1 b^T Ab + \alpha_1^2 \|Ab\|^2)\, b/b^T b$. Para uma boa discussão, consulte *Numerical Linear Algebra* de Trefethen & Bau).

Conjunto de problemas 8.1

3. $x \geq 0, y \geq 0$, com a restrição adicional de que $x + y \leq 0$ admita apenas o ponto $(0, 0)$.

5. Os vértices estão em $(0, 6)$, $(2, 2)$, $(6, 0)$; consulte a Figura 8.3.

6. x(vínculos de 5%) $= z$(vínculos de 9%) $= 20.000$ e y(vínculos de 6%) $= 60.000$.

8. As restrições fornecem $3(2x + 5y) + 2(-3x + 8y) \leq 9 - 10$, ou $31y \leq -1$. Não se pode ter $y \geq 0$.

9. O custo a ser minimizado é $1000x + 2000y + 3000z + 1500u + 3000v + 3700w$. As quantidades x, y, z para Chicago e u, v, w para a Nova Inglaterra satisfazem $x + u = 1.000.000$; $y + v = 1.000.000$; $z + w = 1.000.000$; $x + y + z = 800.000$; $u + v + w = 2.200.000$.

Conjunto de problemas 8.2

1. Os "custos reduzidos" são $r = [1 \quad 1]$, então não é bom que ocorra uma alteração e o vértice é ideal.

3. Em P, $r = [-5 \quad 3]$; então, em Q, $r = \left[\frac{5}{3} \quad -\frac{1}{3}\right]$; R é ideal porque $r \geq 0$.

4. Para um problema de máximos o teste de parada se torna $r \leq 0$. Se isto falhar e o i-ésimo componente for o maior, então essa coluna de N entra na base; a regra **8C** para o vetor saindo da base é a mesma.

5. $BE = B[\cdots\ v \cdots] = [\cdots\ u \cdots]$, contanto que $B_v = u$. Então, E é a matriz correta.

8. Neste momento, $x_4 = 4$ e $x_5 = 2$ estão na base e o custo é zero. A variável de entrada deve ser x_3 para reduzir o custo. A variável de saída deve ser x_5, desde que 2/1 seja menor que 4/1. Com x_3 e x_4 na base, as restrições fornecem $x_3 = 2$, $x_4 = 2$, e o custo agora é $x_1 + x_2 - x_3 = -2$.

12. Se $Ax = 0$, então $P\mathrm{x} = x - A^T(AA^T)^{-1} Ax = x$.

Conjunto de problemas 8.3

2. Maximize $4y_1 + 11y_2$, com $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $2y_1 + y_2 \leq 1$, $3y_2 \leq 1$; a primária tem $x_1^* = 2$, $x_2^* = 3$, o dual tem $y_1^* = \frac{1}{3}$, $y_2^* = \frac{1}{3}$, *custo* $= 5$.

3. À medida que o dual maximiza yb, com $y \geq c$. Portanto, $x = b$ e $y = c$ são viáveis e fornecem o mesmo valor cb para o custo no primal e no dual; de acordo com **8F** elas devem ser ideais. Se $b_1 < 0$, então o x^* ideal é alterado para $(0, b_2, \ldots, b_n)$ e $y^* = (0, c_2, \ldots, c_n)$.

4. $x^* = [1 \quad 0]^T$, $y^* = [1 \quad 0]$, com $y^* b = 1 = cx^*$. As segundas desigualdades em $Ax^* \geq b$ e $y^* A \leq c$ são estritas, portanto, os segundos componentes de y^* e x^* são zero.

6. (a) $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 0$, $c^T x = 3$. (b) É o primeiro quadrante com o tetraedro cortado no vértice. (c) Maximize y_1, sujeito a $y_1 \geq 0$, $y_1 \leq 5$, $y_1 \leq 3$, $y_1 \leq 4$; $y_1^* = 3$.

7. Aqui, $c = [1 \quad 1 \quad 1]$ com $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Nenhuma restrição $x \geq 0$, então, o dual terá igualdade $yA = c$ (ou $A^T y = c^T$). Isso fornece $2y_1 = 1$ e $y_1 = 1$ e $y_2 = 2$ e *nenhuma solução* *viável*. Portanto, o primal deve ter ∞ como máximo: $x_1 = -N$, $x_2 = 2N$ e $x_3 = 0$ fornecem custo $= x_1 + x_2 + x_3 = N$ (arbitrariamente grande).

11. As colunas de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

12. $b = [0 \quad 1]^{\mathrm{T}}$ e $c = [-1 \quad 0]$.

14. Como $cx = 3 = yb$, x e y são ideais por **8F**.

16. Tome $y = [1 \quad -1]$; então $yA \geq 0$, $yb < 0$.

Conjunto de problemas 8.4

2. Designe as capacidades $= 1$ para todas as arestas. O número máximo de caminhos disjuntos de s para t iguala-se, então, ao fluxo máximo. O número mínimo de arestas cuja remoção desconecta s de t é o corte mínimo. Então, fluxo máx $=$ corte mín.

3. O fluxo máximo é 13, com o corte mínimo separando o nó 6 dos outros nós.

4. Aumentar a capacidade dos tubos do nó 4 ao nó 6 ou do nó 4 para o nó 5 produzirá o maior aumento no fluxo máximo. O fluxo máximo aumenta de 8 para 9.

10. Se cada $m + 1$ se casa com o único homem aceitável m, não há nenhum outro com quem nº 1 possa se casar (apesar de todos serem aceitáveis para nº 1).

11. O algoritmo 1 fornece 1–3, 3–2, 2–5, 2–4, 4–6 e o algoritmo 2 fornece 2–5, 4–6, 2–4, 3–2, 1–3. Estas são as árvores geradoras de mesmo comprimento mais curtas.

14. As linhas 1, 4 e 5 violam a condição de Hall; a submatriz 3 por 3 que se origina das linhas 1, 4, 5, e das colunas 1, 2, 5 tem $3 + 3 > 5$.

15. (a) A matriz tem $2n$ 1s que não podem ser cobertos por menos que n linhas, pois cada linha cobre exatamente dois números 1. Ela tem n linhas; deve haver uma combinação completa.

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Os números 1 podem ser cobertos por quatro linhas; cinco casamentos não são possíveis.

16. (a) As linhas 1, 3, 5 só têm números 1 nas colunas 2 e 4. (b) As colunas 1, 3, 5 (nas linhas 2, 4). (c) Submatriz nula das linhas 1, 3, 5 e das colunas 1, 3, 5. (d) As linhas 2, 4 e as colunas 2, 4 cobrem todos os números 1.

Conjunto de problemas 8.5

1. A melhor estratégia para X combina as duas linhas para produzir uma linha horizontal, garantindo essa altura de $^7/_3$. A combinação é $\frac{2}{3}(3y + 2(1 - y)) + \frac{1}{3}(y + 3(1 - y)) = {}^7/_3$, de modo que X escolhe as colunas com frequências $\frac{2}{3}$, 0, $\frac{1}{3}$.

2. Para as colunas, queremos $x_1 a + (1 - x_1) b = x_1 c + (1 - x_1) d = u$, de modo que $x_1(a - b - c + d) = d - b$. Para as linhas, $y_1 a + (1 - y_1) c = y_1 b + (1 - y_1) d = v$ troca b e c. Compare

u com v: $u = x_1(a-b)+b = \dfrac{(a-b)(d-b)}{a-b-c+d} + b = \dfrac{ad-bc}{a-b-c+d} =$ os mesmos após $b \leftrightarrow c = v$.

4. $-10x_1 + 70(1-x_1) = 10x_1 - 10(1-x_1)$, ou $x_1 = \frac{4}{5}$, $x_2 = \frac{1}{5}$;$-10y_1 + 10(1-y_1) = 70y_1 - 10(1-y_1)$, ou $y_1 = \frac{1}{5}$, $y_2 = \frac{4}{5}$; resultado final médio $yAx = 6$.

7. Se X escolhe a coluna j, Y escolherá seu menor valor a_{ij} (na linha i). X não se deslocará, visto que este é o maior elemento nessa linha. No problema 2, $a_{12} = 2$ era um equilíbrio deste tipo. Se trocarmos o 2 e o 4 abaixo dele, nenhum elemento terá essa propriedade, e será necessário utilizar as estratégias mistas.

8. $Ax^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ e $yAx^* = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 = \frac{1}{2}$ para todas as estratégias de Y; $y^*A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & -1 \end{bmatrix}$ e $y^*Ax = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 - x_4$, que não podem exceder $\frac{1}{2}$; no ponto intermediário está $y^*Ax^* = \frac{1}{2}$.

11. Valor 0 (jogo limpo). X escolhe 2 ou 3, y escolhe par ou ímpar: $x^* = y^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

12. O máximo interno é o maior de y_1 e y_2; x concentra-se nesse máximo. Sujeito a $y_1 + y_2 = 1$, o mínimo do *y maior* é $\frac{1}{2}$. Observe $A = I$.

Conjunto de problemas A

3. Uma base para $\mathbf{V} + \mathbf{W}$ é v_1, v_2, w_1; dim $(\mathbf{V} \cap \mathbf{W}) = 1$ com base $(0, 1, -1, 0)$.

5. (a) Maior dim $(\mathbf{S} \cap \mathbf{T}) = 7$ quando $\mathbf{S} \subset \mathbf{T}$.
(b) Menor dim $(\mathbf{S} \cap \mathbf{T}) = 2$.
(c) Menor dim $(\mathbf{S} + \mathbf{T}) = 8$ quando $\mathbf{S} \subset \mathbf{T}$.
(d) Maior dim $(\mathbf{S} + \mathbf{T}) = 13$ ($\mathbf{R}^{13}$ por completo).

7. $\mathbf{V} + \mathbf{W}$ e $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$ contêm $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$.

dim $(\mathbf{V} + \mathbf{W}) = 13$ e dim $(\mathbf{V} \cap \mathbf{W}) = 7$; some para obter $20 = \dim\mathbf{V} + \dim\mathbf{W}$.

8. As linhas que passam por (1, 1, 1) e (1, 1, 2) têm $\mathbf{V} \cap \mathbf{W} = \{0\}$.

9. A interseção dos espaços-coluna é a linha que passa por $y = (6, 3, 6)$:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ equivale } \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} = 0.$$

Os espaços-coluna têm dimensão 2. Sua soma e interseção fornecem $3 + 1 = 2 + 2$.

10. $$F_2 \otimes F_2 = \begin{bmatrix} F_2 & F_2 \\ F_2 & -F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

12. $A_{3\mathrm{D}} = (A_{1\mathrm{D}} \otimes I \otimes I) + (I \otimes A_{1\mathrm{D}} \otimes I) + (I \otimes I \otimes A_{1\mathrm{D}})$.

Conjunto de problemas B

1. $e^{Bt} = \begin{bmatrix} 1 & t & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I + Bt$ desde que $B^2 = 0$. Também, $e^{Jt} = I + Jt$.

2. $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ (autovalores distintos); $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (B tem $\lambda = 0, 0$ mas posto 1).

4. $J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (A é diagonalizável); $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (autovetores $(1, 0, 0)$ e $(2, -1, 0)$).