

ALGEBRA LINEAR

Prof. Dr. Patricio R. Impinnisi

Aula 3

Espaços Vetoriais

Espaços Vetoriais

Tudo o que fizemos até agora foi somar vetores e multiplicar eles por escalares (números) ou seja: CL.

Por que vamos estudar os espaços vetoriais?

Espaços em termos gerais são agrupações de elementos que satisfazem certas regras.

Por exemplo, no caso dos **espaços vetoriais** é um conjunto de vetores que satisfazem as regras de soma de vetores e multiplicação por escalares (permanecendo os elementos nesse espaço!)

Regras:

$u+v$ dá um vetor no mesmo espaço

cu dá um vetor no mesmo espaço

Combinando temos as CL: $cu + dv$ é um vetor no mesmo espaço

De fato são 8 regras, mas derivam destas duas (página 74 exercício 6 do livro de Gilbert Strang)

Espaços Vetoriais

Exemplos de espaços vetoriais:

1. $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n, \dots, \mathbb{R}^\infty$ (\mathbb{R} por reais, suas componentes são números reais)
2. Matrizes 3×2 ?
3. Funções $f(x)$

Não são espaços vetoriais:

1. 1^{er} quadrante em \mathbb{R}^2
2. 1^{er} e 3^{er} quadrantes em \mathbb{R}^2 ?

Espaços Vetoriais

Subespaços:

São espaços vetoriais dentro de outros espaços vetoriais...satisfazem as regras de adição de vetores e multiplicação por escalares permanecendo dentro do subespaço...

Exemplos:

Quantos subespaços há dentro de \mathbb{R}^2 ?

O próprio \mathbb{R}^2 , qualquer \mathbb{R}^1 que passe pela origem e o \mathbb{R}^0 (espaço de um ponto só)

Quais são os subespaços de \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^n ?

Questão: No caso \mathbb{R}^3 dois subespaços qualquer , um plano P e uma linha L ao fazer $P(\mathbb{R}^2) \cup L(\mathbb{R}^1)$ e $P(\mathbb{R}^2) \cap L(\mathbb{R}^1)$ formam um subespaço?

Vamos ver agora os **espaços vetoriais importantes** para a álgebra linear (eles são 4)

Espaços Vetoriais

Espaços das colunas

As CL dos vetores colunas das matrizes formam espaços (verificar que satisfazem as regras)
Este espaço é chamado **espaço das colunas** da matriz A e é representado por $C(A)$

Exemplo de uma matriz 4x3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

O $C(A)$ desta matriz A é um subespaço de qual espaço? \mathbb{R}^4

O $C(A)$ desta matriz A são todas as CL das colunas de A

O $C(A)$ é um subespaço de \mathbb{R}^4 ou é tudo o \mathbb{R}^4 ?

Afirmção: o $C(A)$ de uma matriz $m \times n$ é um subespaço de \mathbb{R}^m (por quê?)

Espaços Vetoriais

No caso de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Sabemos que por ter $m > n$ temos mais equações do que incógnitas e em geral não terá solução.

O sistema $Ax = b$ é solúvel somente se o vetor b é uma CL de $C(A)$ e portanto pertence ao $C(A)$

Em outras palavras estamos dizendo (interpretação por colunas) que:

$$u \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Quais são alguns possíveis lados direitos ($\text{col}(b)$) para que esta equação tenha solução?

Quais são todos os possíveis lados direitos ($\text{col}(b)$) para que esta equação tenha solução?

São os “b’s” que pertencem ao $C(A)$

Cada matriz evidentemente tem seu $C(A)$ particular.

Espaços Vetoriais

Exemplo: analisemos o caso da matriz identidade 5×5

As cinco colunas dessa matriz podem, ser combinadas para produzir qualquer vetor em \mathbb{R}^5 !

Isso será válido para qualquer matriz 5×5 que não seja singular!!! (por que 😊 ?)

Assim qualquer matriz 5×5 que não seja singular terá o espaço \mathbb{R}^5 inteiro como espaço coluna !

Para essa matriz (não singular) podemos resolver o sistema por eliminação de Gauss e teremos 5 pivôs e todo “vetor b ” estará contido em $C(A)$

Espaço nulo de A

Esta é uma abordagem complementar à anterior para resolver o problema de $Ax=b$

Na abordagem anterior, através do $C(A)$, estávamos preocupados com os b possíveis...

Agora estamos interessados nas possíveis soluções (vetor u, v, w)

Por exemplo, para $b=0$ sempre existe a solução $x=0$ (evidente e pouco interessante)

Mas também podem existir infinitas soluções (sempre acontecerá se $n > m$!)

O interessante aqui é que as soluções x de $Ax=0$ formam um espaço vetorial chamado espaço nulo de A e é representado por $N(A)$. É um subespaço de \mathbb{R}^n (do número de incógnitas).

Espaços Vetoriais

O $N(A)$ forma um subespaço pois:

Se $Ax=0$ e $Ax'=0$ então $A(x+x')=0$

E se $Ax=0$ então $A(cx)=0$

Todo falha se o lado direito não for 0!!! Ou seja, só as soluções de $Ax=0$ são um subespaço (por quê?)

Assim **apenas as soluções da equação homogênea $Ax=0$** formam um subespaço

Como exemplo vejamos qual é o espaço nulo da matriz A abaixo, para isso resolvemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da primeira linha temos que $u=0$

A terceira linha exige que $w=0$

Logo as outras exigem que $v=0$

Desta forma o $N(A)$, neste caso, possui um único vetor, o vetor nulo $(0,0,0)$ o que implica que esta matriz possui

colunas independentes

Espaços Vetoriais

Mas tudo muda se uma coluna for uma CV das anteriores...

Por exemplo, vamos adicionar uma quarta coluna a A (soma de (1) (2) e (3)) e criar a matriz B assim...

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O $C(A)$ é igual ao $C(B)$ (por quê?)

Porque a nova coluna está no plano formado pelos três vetores coluna da matriz A (é a soma desses vetores)

Mas agora o espaço nulo de B que é $N(B)$ contem também o vetor $(1,1,1,-1)$

E automaticamente qualquer múltiplo dele $c(1,1,1,-1)$, ou seja qualquer vetor $(c,c,c,-c)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ c \\ c \\ -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim o $N(B)$ é a reta com todos os pontos $(c,c,c,-c)$ que como todo subespaço contem a origem.

Resumindo:

Espaços Vetoriais

Resumo:

Queremos e devemos: para qualquer sistema $Ax=b$, ser capazes de encontrar $C(A)$ e $N(A)$ além de todos os lados direitos “ b ” possíveis e todas as soluções x da equação homogênea $Ax=0$.

Os vetores b estão no espaço coluna

Os vetores x de $Ax=0$ estão no espaço nulo

Devemos calcular as dimensões desses subespaços e um conjunto “adequado” de vetores para gerar esse subespaço

Exercícios

Livro Álgebra Linear e suas aplicações. Gilbert Strang. 4 edição

Página 73

Conjunto de problemas 2.1

Resolver: 1; 4; 5; 6a; 10; 14; 15a e 15b; 17; 21; 22; 23; 26; 29;
30;

Espaços Vetoriais

Solução de $Ax=0$ e $Ax=b$ e a matriz reduzida R

Sabemos que para uma matriz ser invertível seu espaço nulo deve conter apenas $x=0$ (senão de $b=0$ teríamos que obter $x \neq 0$que é quando $Ax=0$ é multiplicado por A^{-1})

Também sabemos que se a matriz é invertível seu espaço coluna é o espaço inteiro (solução para todo b !)

O interessante é quando temos **espaços nulos com mais do que o vetor nulo e/ou o espaço coluna não contêm todos os vetores b possíveis.**

Qualquer vetor do espaço nulo x_N pode ser somado a uma solução particular x_p e esta soma x_N+x_p segue sendo a solução da equação linear! (pois de fato somamos 0 a uma solução)

As soluções para todas as equações lineares têm a forma: $x = x_p+x_N$

Solução completa: $Ax_p=b$ e $Ax_N=0$ geram $A(x_p+x_N)=b$

Mas se o $C(A)$ não tiver todos os b de R^m precisamos identificar qual b é possível

Vejam exemplos:

Espaços Vetoriais

Solução de $Ax=0$ e $Ax=b$ e a matriz reduzida R

Vamos supor o sistema $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ Que podemos dizer deste sistema?

Geralmente não tem solução.... Quando tem solução? Só se $2 b_1 = b_2$

Qual é o espaço coluna dessa matriz?

Reta que passa por zero e por (1,2) (2,4) etc. ou seja os b 's tem que estar nessa reta e para isso para qualquer número c temos que b tem que ser $(c, 2c)$ ou seja ter componentes múltiplos de (1,2)

Quando $b_2 = 2 b_1$ teremos infinitas soluções, por exemplo:

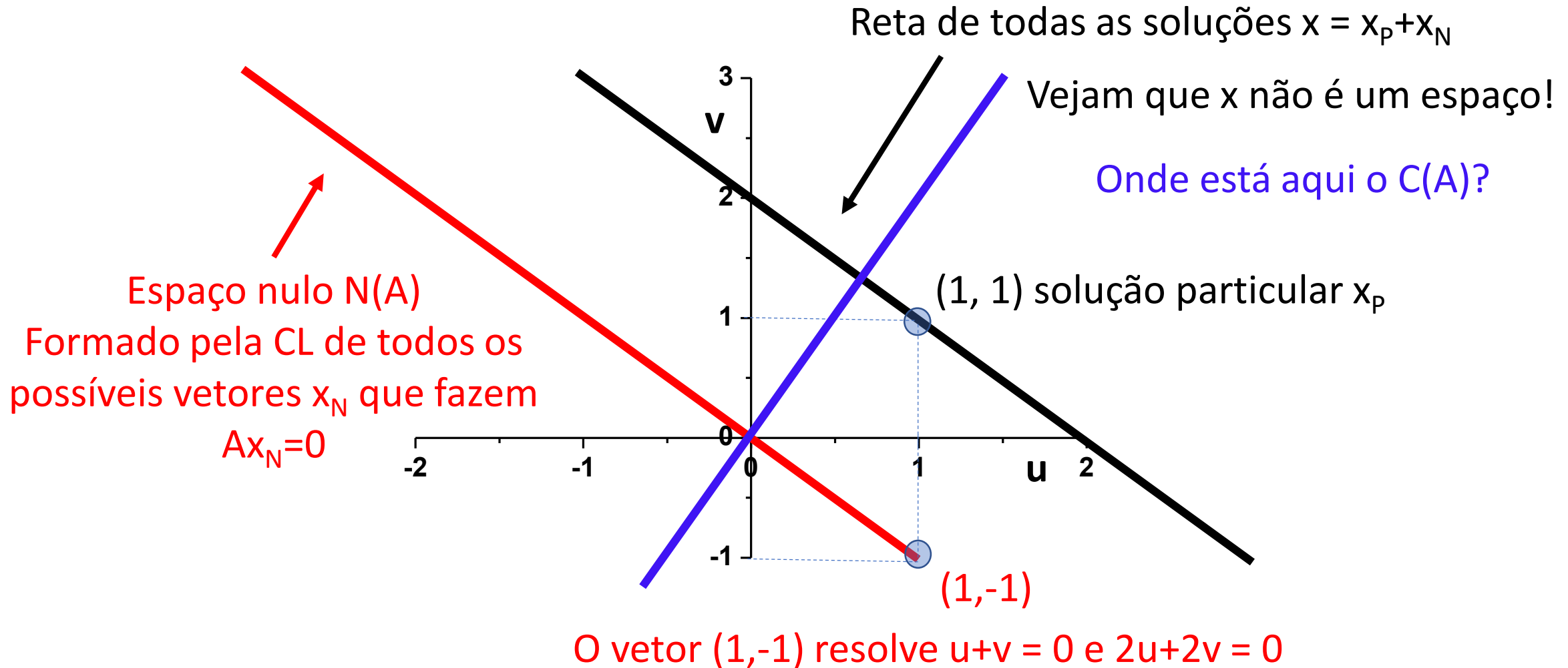
Uma solução particular x_p das equações $u+v = 2$ e $2u+2v = 4$ é $x_p = (1,1)$

Qual é o $N(A)$? $N(A)$ contem além de (0,0) o vetor (1,-1) e seus múltiplos $(c,-c)$

Vamos ver isso graficamente:

Espaços Vetoriais

Solução de $Ax=0$ e $Ax=b$ e a matriz reduzida R



Espaços Vetoriais

Solução de $Ax=0$ e $Ax=b$ e a matriz reduzida R

Vamos supor agora uma matriz retangular, isso traz novas possibilidades, como veremos a seguir.

Vamos supor a matriz A 3x4 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ Aplicamos o método de eliminação para eliminar $a_{2,1}$ e $a_{3,1}$ e encontramos um problema....

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & \mathbf{0} & 3 & 3 \\ 0 & \mathbf{0} & 6 & 6 \end{bmatrix}$ Permutar não resolve! **Se a matriz fosse quadrada seria singular!**
Não sendo quadrada, vamos prosseguir com a terceira coluna...
E chegamos à matriz triangular superior U

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os pivôs de U (1 e 3) não estão na diagonal principal! E como sempre, debaixo deles sempre tem zeros!

Espaços Vetoriais

Solução de $Ax=0$ e $Ax=b$ e a matriz reduzida R

Num caso geral teríamos sempre que A pode ser levada a um U da forma:

$$U = \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Onde os pivôs são os primeiros elementos não nulos de cada linha
Abaixo de cada pivô só há zeros (obtidos por eliminação)
No caso retangular vale tudo o que aprendemos sobre L ($A=LU$, ou seja $L = E^{-1}$)

L aparece ao desfazer as eliminações que aplicamos para chegar a U, portanto tem o mesmo número de linhas que A e U. **Qual é a matriz L correspondente á matriz U do exemplo anterior?**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Espaços Vetoriais

Solução de $Ax=0$ e $Ax=b$ e a matriz reduzida R

Agora vamos obter a matriz R a partir de U, tínhamos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora vamos gerar zeros acima dos pivôs, mas antes vamos tornar os pivôs iguais a 1 dividindo a linha pelo valor do pivô (isso não altera a equação correto?)

$$U' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O MATLAB utiliza o comando $R = \text{rref}(A)$ para fazer isto. Evidentemente que $\text{rref}(R)=R$

A partir de R encontramos rapidamente o espaço nulo de A ou seja $Rx=0$ (as soluções de $Rx=0$ são as mesmas de $Ax=0$ e $Ux=0$... por quê?).

Espaços Vetoriais

Solução de $Ax=0$ e $Ax=b$ e a matriz reduzida R

A matriz R permite identificar quais são as variáveis pivô e quais as variáveis livres:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz corresponde ao conjunto de variáveis u, v, w, y e $Rx=0$ é :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As variáveis pivô são as das colunas pivô e as livres são as das colunas sem pivôs.

Para encontrar a solução de $Rx=0$ atribuímos valores às variáveis livres pois as variáveis pivô são univocamente determinadas por esses valores:

$$\begin{array}{lll} Rx = 0 & u + 3v - y = 0 & u = -3v + y \\ & w + y = 0 & w = -y \end{array}$$

Espaços Vetoriais

Solução de $Ax=0$ e $Ax=b$ e a matriz reduzida R

Desta forma o espaço nulo (soluções de $Rx=0$ e $Ax=0$) contem todas as **CL de duas soluções especiais**:

$$x = \begin{bmatrix} -3v + y \\ v \\ -y \\ y \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A primeira solução especial é com **$v=1$** e **$y=0$**

A segunda solução especial é com **$v=0$** e **$y=1$**

Todas as soluções são CL's destas duas soluções.

Resumo:

O melhor modo de encontrar as soluções de $Ax=0$ é através de $Rx=0$

Dando valores 0's e 1 às variáveis livres e resolvendo $Rx=0$ se obtêm as soluções especiais (tantas quanto variáveis livres temos, cada variável livre produz sua solução especial).

E se não houver variáveis livres? Qual é o espaço nulo?

No espaço R^4 de todos os possíveis x a solução de $Ax=0$, ou seja o espaço nulo de A $N(A)$, é um subespaço R^2 formado pelos vetores $(-1, 1, 0, 0)$ e $(1, 0, -1, 1)$.

Espaços Vetoriais

Solução de $Ax=0$ e $Ax=b$ e a matriz reduzida R

Assim temos que para $Rx=0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = 0$$

O $N(R)$ é (pois é a CL das soluções especiais):

$$N(R) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir de R a matriz $N(R)$ se formou com os números das soluções especiais (v e y) e os números 3, 0, -1 e 1 (com sinal invertido) das colunas **não pivôs**

Espaços Vetoriais

Solução de $Ax=0$ e $Ax=b$ e a matriz reduzida R

Se temos um sistema onde $n > m$ (mais colunas que linhas) deverá haver, no mínimo, $n-m$ variáveis livres

Quando haverá mais variáveis livres?

Haverá mais se as linhas forem dependentes (na matriz R se reduzem a zero)

Às variáveis livres podemos atribuir qualquer valor (escolhemos 0's e 1 por ser o mais fácil)

Se temos variáveis livres temos mais soluções, além da trivial $x=0$

Logo, haverá infinitas soluções (pois: se para um $x \neq 0$ temos que $Ax=0$, então para qualquer "c" as outras soluções $A(cx)$ também serão zero).

De fato, o espaço nulo de A que é $N(A)$ (que é o mesmo que o $N(R)$ pois só fizemos CL's) terá a dimensão igual ao número de variáveis livres.

As variáveis livres do espaço nulo (espaço R^m) se relacionam com as variáveis pivô do espaço coluna (R^n).

Vamos agora a resolver o caso não homogêneo $Ax=b$, ou $Ux=c$ ou agora $Rx=d$

Retornemos a nossa matriz U ...

Espaços Vetoriais

Solução de $Ax=0$ e $Ax=b$ e a matriz reduzida R

Agora como estamos no caso $b \neq 0$, as operações nas linhas tem que ser estendidas à coluna b

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - 2b_2 + 5b_1 \end{bmatrix}$$

O vetor do lado direito que aparece após a triangulação da matriz A no lado esquerdo é simplesmente $L^{-1}b$ por quê?

Porque foi EA que levou a U portanto do lado direito temos que o mesmo, ou seja Eb leva a c, mas por outro lado sabemos por definição que $L \equiv E^{-1}$ e portanto: multiplicando por L^{-1} pelo lado esquerdo teremos $I = L^{-1}E^{-1}$ o que implica que um é a inversa do outro o que leva a $L^{-1} = E$ Então acima chegamos a $Ux=c$, mas não sabemos se tem solução.

Olhando as equações vemos facilmente que $b_3 - 2b_2 + 5b_1$ é inconsistente (a menos que seja =0)... por quê?

Retomemos nosso exercício acima....

Espaços Vetoriais

Solução de $Ax=0$ e $Ax=b$ e a matriz reduzida R

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - 2b_2 + 5b_1 \end{bmatrix}$$

Interessante que mesmo havendo mais incógnitas do que equações pode não haver nenhuma solução... mas sabemos como procurar estas soluções (se é que elas existem)

Sabemos que para que exista solução, b tem que estar no espaço coluna de A $C(A)$ **(e não de R ou de U , pois são diferentes !!!!)**.

Lembrando que o espaço nulo de A , U e R são os mesmos, mas não o espaço coluna!

Portanto as colunas de A são os vetores que determinam o $C(A)$ e onde b tem que estar para que exista solução.

Mas a segunda coluna de A é o triplo da primeira e a quarta coluna é a terceira menos a primeira....**exatamente essas colunas dependentes são aquelas sem pivôs** quando transformamos A em U .

Então qual é o espaço coluna $C(A)$?

Espaços Vetoriais

Solução de $Ax=0$ e $Ax=b$ e a matriz reduzida R

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - 2b_2 + 5b_1 \end{bmatrix}$$

O espaço coluna de A $C(A)$ pode ser escrito de duas formas diferentes:

1. Como CL dos vetores coluna 1 e 3 (nosso método tradicional e bem entendido)
2. Como o plano de todos os vetores b que satisfazem $b_3 - 2b_2 + 5b_1 = 0$ (esta condição determina um plano)

Vejam que todas as colunas satisfazem essa condição....e portanto estão nesse plano (checar)
Geometricamente significa que o vetor $(5, -2, 1)$ é perpendicular a cada uma das colunas de A e portanto não poderia ser uma CL destas colunas.

Vamos resolver nosso sistema para um b que permita solução, escolhemos para isso qualquer vetor b que satisfaz a condição $b_3 - 2b_2 + 5b_1 = 0$ por exemplo $(1, 5, 5)$

Espaços Vetoriais

Solução de $Ax=0$ e $Ax=b$ e a matriz reduzida R

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

A triangulação gera U do lado esquerdo e c do lado direito, ou seja obtemos $Ux = c \dots$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A última equação é $0=0$ como esperado (pela nossa escolha do vetor $b = 1,5,5$)

A retrossubstituição gera as equações:

$$\begin{aligned} 3w+3y &= 3 && \text{de onde} && w = 1-y \\ u+3v+3w+2y &= 1 && \text{de onde} && u = -2-3v+y \end{aligned}$$

O passo seguinte é dar valores 0 e 1 às variáveis livres e obter as soluções especiais x de $Ax=0$ que formam os vetores coluna cuja CL dá todas as soluções de $Ax=0$ e portanto geram o espaço nulo de A , $N(A)$ (a solução completa é $x=x_p + x_N$)

Quais são os vetores das soluções especiais?

Espaços Vetoriais

Solução de $Ax=0$ e $Ax=b$ e a matriz reduzida R

Com esses vetores da solução especial e uma outra solução particular da equação $Ax=b$ (aquela que tem as variáveis livres iguais a zero ou qualquer outra) geramos a solução completa x do sistema $Ax=0$

$$x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Geometricamente, as soluções preenchem uma superfície bidimensional, mas não é um subespaço pois não inclui $x=0$. Ela é paralela ao espaço nulo $N(A)$, mas deslocada pela adição da solução particular x_p

Resumo:

1. Transformamos $Ax=b$ em $Ux=c$
2. Para as variáveis livres = 0 encontramos uma solução particular x_p de $Ax = b$ e de $Ux = c$
3. Encontramos as soluções especiais da equação $Ax=0$ (as mesmas de $Ux=0$ ou $Rx=0$)

Assim obtivemos a solução completa do sistema

Espaços Vetoriais

Solução de $Ax=0$ e $Ax=b$ e a matriz reduzida R

A utilização da matriz reduzida R facilita mais esta procura pela solução completa do sistema. Qual é a matriz R obtida a partir de U?

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para obter R devemos ter zeros acima dos pivôs.

Para isso a nova linha (1) é a linha (1) menos a linha (2).

Logo devemos ter valores 1 na posição dos pivôs, para isso dividimos as linhas pelos valores dos pivôs.

Assim obtermos o sistema $Rx=d$ (incluindo a transformação de c para d) da matriz reduzida R:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Deste sistema sai imediatamente (considerando a solução particular com as variáveis livres $v=0$ e $y=0$) que $u=-2$ e $w=1$. Ou seja os primeiros elementos não nulos do vetor d são os valores de u e w, as variáveis pivôs.

Espaços Vetoriais

Solução de $Ax=0$ e $Ax=b$ e a matriz reduzida R

Conclusões:

A eliminação de Gauss revela quais são as variáveis livres e quais as variáveis pivô.

Se houver r variáveis pivô haverá $n-r$ variáveis livres

r é denominado Posto (Rank) da matriz

Portanto as últimas $m-r$ linhas de U e R serão nulas o que leva a que os últimos $m-r$ elementos de c e d sejam nulos também!!!

Se escolhermos a solução particular x_p como sendo aquela que tem as variáveis livres iguais a zero, teremos que os primeiros r elementos do vetor d (do sistema $Rx_p=d$) serão os valores das variáveis pivô

Finalmente as soluções de espaço nulo x_N (que somadas ao x_p dão a solução completa do sistema) são as combinações de $n-r$ soluções especiais tomando uma variável livre por vez diferente de zero (fazemos ela igual a 1).

As variáveis pivô nesta solução especial podem ser encontradas na coluna correspondente de R com o sinal trocado (como vimos no exemplo da matriz 2x2)

Vejam mais um exemplo....

Espaços Vetoriais

Solução de $Ax=0$ e $Ax=b$ e a matriz reduzida R

Exemplo de uma matriz A 3x4 do sistema $Ax=b$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = b_1$$

$$2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 12x_4 = b_2$$

$$3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 13x_4 = b_3$$

1 passo: transformar $Ax=b$ para $Ux=c$

2 passo: encontre qual é a condição sobre b_1, b_2, b_3 para que exista uma solução

3 passo: determine qual é o espaço coluna de A, $C(A)$

4 passo: Determine qual é o espaço nulo de A, $N(A)$

5 passo: encontre uma solução particular de $Ax=b$ (b permitido)

6 passo: reduza $Ux=c$ para $Rx=d$, nesta forma determinamos tudo de uma vez (soluções especiais e particulares) ou fazemos $Rx=0$ e resolvemos as especiais...

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 2 & 4 & 8 & 12 & b_2 \\ 3 & 6 & 7 & 13 & b_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & b_3 - 3b_1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - 5b_1 \end{bmatrix}$$

A última equação dá a condição para que exista a solução $b_3 + b_2 - 5b_1 = 0$ ($0=0$)

Espaços Vetoriais

Solução de $Ax=0$ e $Ax=b$ e a matriz reduzida R

A partir destas equações, qual é o espaço coluna $C(A)$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 2 & 4 & 8 & 12 & b_2 \\ 3 & 6 & 7 & 13 & b_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & b_3 - 3b_1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - 5b_1 \end{bmatrix}$$

A última equação dá a condição para que exista a solução $b_3 + b_2 - 5b_1 = 0$ ($0=0$)

O $C(A)$ é o plano formado pelos vetores coluna de A que contem os pivôs (identificados em U) e é um plano em \mathbb{R}^3 . Os vetores coluna são $(1,2,3)$ e $(3,8,7)$.

A outra descrição é a do plano formado pelos vetores que satisfazem $b_3 + b_2 - 5b_1 = 0$

Quais são as soluções especiais x no espaço nulo $N(A)$?

São as soluções com $x_2=1$ $x_4=0$ e $x_2=0$ $x_4=1$

$$N(A) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

São as soluções especiais de $Ax=0$, ou por retrossubstituição em $Ux=0$ ou por troca de sinais em $Rx=0$

Espaços Vetoriais

Solução de $Ax=0$ e $Ax=b$ e a matriz reduzida R

Vamos escolher um vetor b que pertença a $C(A)$, por exemplo $(0, 6, -6)$, qual é o vetor c de $Ux=c$?

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - 5b_1 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vamos agora obter a matriz R e o vetor d de $Rx=d$

Primeiro **dividimos a linha pivô pelo pivô** para obter o número 1 nessa posição

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & \frac{b_2 - 2b_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - 5b_1 \end{bmatrix}$$

Logo precisamos eliminar o elemento a_{13}

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 2 & b_1 - 3 \frac{b_2 - 2b_1}{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & \frac{b_2 - 2b_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - 5b_1 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Espaços Vetoriais

Solução de $Ax=0$ e $Ax=b$ e a matriz reduzida R

Esta matriz R e este vetor d da equação $Rx=d$ permitem obter diretamente a solução particular (variáveis livres nulas)

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O vetor x_p é composto pelas variáveis livres = 0 e pelas variáveis pivôs que são os dois primeiros elementos do vetor d (os não nulos):

$$x_p = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Já os vetores do $N(A)$ (das soluções especiais) são formados pelos valores 0 e 1 das variáveis livres (v e y) e os valores das variáveis pivô (u e w) em $N(A)$ são os elementos das colunas **NÃO PIVÔ** na matriz R com sinal invertido

$$N(A) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercícios

Livro Álgebra Linear e suas aplicações. Gilbert Strang. 4 edição

Página 85

Conjunto de problemas 2.2

Resolver: 1; 2; 3; 4; 13; 14; 15; 26; 34; 36; 50; 53;

Espaços Vetoriais

Independência linear, base e dimensão

Vimos que o posto r de uma matriz é o número de variáveis pivô...que é o número de equações (linhas) independentes.

Se a CL de um conjunto de vetores $av_1 + bv_2 + cv_3 + \dots + fv_n$ só for igual a zero quando todos os coeficientes a, b, c, \dots forem zero, então eles são linearmente independentes.

Exemplo de colunas LD (linearmente dependentes): $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Exemplo de colunas LI (linearmente independentes): $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Por ter três pivôs, a matriz A tem todas as colunas e linhas LI, a única forma de ter $Ax=0$ é quando $x=0$ (vetor nulo). Portanto o espaço nulo contém somente o vetor nulo.

Conclusão: as colunas de A são LI se $N(A)=\{\text{vetor nulo}\}$. O mesmo se aplica às linhas de A .

As linhas não nulas de qualquer matriz U são LI (as outras dão zero).

As colunas com Pivôs são certamente LI (tem componentes em direções que os outros não tem)

Espaços Vetoriais

Independência linear, base e dimensão

Mais algumas conclusões:

Um conjunto de n vetores em \mathbb{R}^m é linearmente dependente se $n > m$ (é a mesma coisa que dizer que um sistema $m \times n$ tem uma solução $Ax=0$ com $x \neq 0$ se $n > m$)

Exemplo: **as três colunas em \mathbb{R}^2 da matriz A NÃO PODEM SER LI pois $n > m$** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Para encontrar a CL que produz zero resolvemos $Ax=0$ por eliminação (encontramos U)...

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

As colunas pivôs são a (1) e a (2) portanto a coluna (3) é a coluna da variável livre que para um vetor coluna $x(u,v,w)$ é a variável w .

Fazendo $w=1$ (variável livre) encontramos que $Ux=0$ para $u=1$, $v=-1$, $w=1$ e portanto temos que são dependentes.

Vamos ver agora a importância de conhecer o Posto (Rank) de uma matriz e sua relação com as soluções das equações que formaram essa matriz.

Espaços Vetoriais

Independência linear, base e dimensão

Imagine uma matriz A $m \times n$, podemos ter : $r < m$; $r < n$; $r = m$; $r = n$; $r = m = n$; $r < n$ e $r < m$

Analise primeiro o caso de uma matriz A de Posto $r = n$

Qual é o espaço nulo desta matriz? Qual é sua solução completa? Quantos pivôs e livres ?

O espaço nulo é o vetor nulo $N(A) =$ vetor nulo ($r = n$ tem um pivô em cada coluna!)

Solução completa de $Ax = b$ é $x = x_p$!!! (pois o espaço nulo é zero..... e $x = x_p + x_N$)

É a única solução (se é que ela existe) portanto temos: **0 ou 1 solução (depende do b)**

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ Qual é o posto? (quantos pivôs teremos ao aplicar a eliminação?)
 $r = 2$...pivôs nas duas primeiras e elimino todas as outras linhas!
Qual é a matriz R ?

$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Temos somente duas linhas LI, as outras são CL das duas primeiras
Nenhuma CL das colunas dá o vetor 0 (só a CL com coeficientes 0)
Quando há solução de $Ax = b$? (quatro equações e duas variáveis)
Só quando b é CL dessas colunas senão não teremos solução!

Espaços Vetoriais

Independência linear, base e dimensão

Analisemos o caso de uma matriz $A(m \times n)$ de Posto $r = m$

Quantos pivôs e variáveis livres? m pivôs! e $n-r$ variáveis livres Toda linha tem um pivô

Para qual b existe solução? **Para todo b** (ao fazer a eliminação não obtemos nenhuma linha "zero" portanto não há exigências sobre b !!! **Sempre existe solução**)

Como temos $n-r$ ($n-m$) variáveis livres....**infinitas soluções** (diferentes valores para as variáveis livres) vejamos isso através da matriz R ...

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Qual é a R ? $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & - & - \\ 0 & 1 & - & - \end{bmatrix}$

Este caso foi $r = m < n$, temos soluções e podem ser **1 ou infinitas para qualquer b**

Vejamos agora o caso foi **$r = m = n$** Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ R é: $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Como ao mesmo tempo temos **$r = m$** e **$r = n$** **teremos só uma solução (condições anteriores)**

Espaços Vetoriais

Independência linear, base e dimensão

Resumo:

$$\underline{r = m = n}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \mathbb{I}$$

Uma solução
para $Ax=b$

$$\underline{r = n < m}$$

$$R = \begin{bmatrix} \mathbb{I} \\ 0 \end{bmatrix}$$

0 ou 1 solução
para $Ax=b$

$$\underline{r = m < n}$$

$$R = [\mathbb{I} \quad \mathbb{F}]$$

Infinitas
soluções de
 $Ax=b$

Neste caso não necessariamente as colunas de \mathbb{I} estarão primeiro, podem estar misturadas com as colunas das variáveis livres da matriz \mathbb{F}

$$\underline{r < m, r < n}$$

$$R = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{F} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

0 ou infinitas
de $Ax=b$

O Posto (Rank) r informa todo sobre o número de soluções!!!

Vamos ver agora a **base e dimensão de um espaço**.

Espaços Vetoriais

Independência linear, base e dimensão

Independência vetorial e matrizes

Os vetores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são independentes se a **única forma** de obter:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n = 0$$

é quando **todos** os $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n = 0$

Exemplos em \mathbb{R}^2 de dependência e independência....o caso do vetor zero.

Com o vetor zero presente não há independência vetorial possível, ele é sempre dependente!

Caso de três vetores em \mathbb{R}^2 (exemplo com vetores coluna de matrizes $m < n$)

Colocando vetores nas colunas de matrizes, eles serão independentes se o espaço nulo contém só o vetor nulo!

Neste caso o Posto $r=n$ para vetores independentes (0 variáveis livres) e $r < n$ para vetores dependentes (existem variáveis livres)

Espaços Vetoriais

Independência linear, base e dimensão

Dimensão de um espaço vetorial:

É o número de vetores independentes que geram o espaço, essa é sua dimensão (são seus graus de liberdade)

A base é o conjunto de vetores independentes máximo possível.

Exemplos em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3

Base de um espaço vetorial:

Os vetores que formam a base de qualquer espaço T (ou $N(A)$ ou $C(A)$ etc.) são LI

Eles geram o espaço T (todo vetor desse espaço T é uma CL destes vetores base)

Há infinitas bases em qualquer espaço vetorial T (exemplos em \mathbb{R}^3)

Bases sempre formam matrizes quadradas $n \times n$...que são invertíveis!!! (são infinitas) e todas tem a mesma dimensão n !!! (o mesmo número de vetores LI)

O Posto r de uma matriz A é sempre a dimensão do $C(A)$, $\text{Dim } C(A) = r$

No caso do espaço nulo $N(A)$ temos que $\text{Dim } N(A) = \text{N}^\circ \text{ variáveis livres} = n - r$

Existem 4 subespaços vetoriais fundamentais na álgebra...

Espaços Vetoriais

Os quatro subespaços fundamentais

O espaço coluna $C(A)$

Sua dimensão é o posto r e está no espaço \mathbb{R}^m (pois m são suas componentes)

O espaço nulo $N(A)$

Sua dimensão é $n-r$ (variáveis livres) e está no espaço \mathbb{R}^n (pois n são suas componentes)

O espaço linha de A que é $C(A^T)$

Não vimos ele especificamente, mas evidentemente ele é o espaço coluna de A^T ou seja $C(A^T)$

Sua dimensão é r e está no espaço \mathbb{R}^n

O espaço nulo à esquerda de A que é $N(A^T)$

Ou seja o espaço nulo de A^T $N(A^T)$

Sua dimensão é $m-r$ (m colunas – r pivôs!!) e está no espaço \mathbb{R}^m

Esse espaço (por definição) contém todos os vetores y tais que $A^T y = 0$ (isso é o espaço nulo de A^T) ou transpondo o produto temos: $y^T A = 0$...o vetor aparece à esquerda

Exemplo: $A = U = R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Qual é o espaço coluna, o espaço linha, o espaço nulo e o espaço nulo à esquerda desta matriz?

Espaços Vetoriais

Os quatro subespaços fundamentais

$$A = U = R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O espaço coluna $C(A)$ é $C(A) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sua dimensão é o posto r , que é 1, portanto está em \mathbb{R}^1

O espaço linha de A que é $C(A^T)$ é... a reta que passa por $(1,0,0)^T$, esta reta está em \mathbb{R}^3 e a dimensão do espaço linha é \mathbb{R}^1 também ($n-r$)

O espaço nulo $N(A)$ é...temos um único pivô...portanto as colunas de variáveis livres são (2) e (3)

Logo dando valores 0 e 1 às variáveis v e w teremos as soluções especiais que determinam a matriz nula $N(A)$

Ele é um plano em \mathbb{R}^3 (três variáveis)

$$N(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O espaço nulo à esquerda de A é o espaço nulo da matriz transposta A^T

$N(A^T)$ portanto, como temos uma única variável livre na A^T ...

$$N(A^T) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$N(A^T)$ é uma reta em \mathbb{R}^2 (duas variáveis)

Espaços Vetoriais

Os quatro subespaços fundamentais

Vamos relacionar os 4 subespaços fundamentais de A com os quatro subespaços fundamentais de U . Vejamos nossas conhecidas matrizes a seguir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

No caso de uma matriz U “escalonada” o espaço linha (que contem todas as linhas LI) é evidente. As linhas diferentes de zero são uma base desse espaço (aqui é um plano em \mathbb{R}^4). Desta forma a regra é essa: “**as linhas não nulas são uma base e o espaço linha que tem dimensão r** ”.

Como a eliminação de Gauss não modifica o espaço linha, temos que **o espaço linha de A é o mesmo que o espaço linha de U ou de R e todos tem a mesma dimensão r** . (eles podem ter linhas diferentes mas são CL umas das outras e portanto estão no mesmo espaço!)

Por que isso não se aplica ao espaço coluna?

Porque ao combinar as colunas mudamos as coordenadas dos vetores de forma diferente logo mudam de direção, saem dos planos em que estavam e assim mudam o espaço!!!!

Espaços Vetoriais

Os quatro subespaços fundamentais

Vamos relacionar os 4 subespaços fundamentais de A com os quatro subespaços fundamentais de U. Vejamos nossas conhecidas matrizes a seguir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os espaços coluna (chamados imagens)

Os espaços colunas de A e U são diferentes...

...mas suas dimensões são iguais (igual número de colunas LI).

As colunas pivô de U são uma possível base deste espaço...assim como as mesmas colunas pivô (as colunas 1 e 3) de A!

Assim para encontrar uma base dos espaços coluna utilizamos as r colunas pivôs de U e essas mesmas colunas de A (os vetores são diferentes mas pertencem ao mesmo espaço)

A dimensão do espaço coluna é o posto r da matriz (que também é a dimensão do espaço linha, pois **o número de colunas LI é igual ao número de linha LI sempre!**)

Espaços Vetoriais

Os quatro subespaços fundamentais

Vamos relacionar os 4 subespaços fundamentais de A com os quatro subespaços fundamentais de U . Vejamos nossas conhecidas matrizes a seguir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Relação entre os espaços nulos (chamados núcleos)

O método de eliminação que permite ir de $Ax=0$ para $Ux=0$ e para $Rx=0$ não altera as soluções das equações (opera da mesma forma em todas as variáveis cuja CL da zero).

Portanto **os espaços nulos de A , U e R são iguais!** E como temos apenas r equações independentes (por isso escolhemos $n-r$ soluções especiais com 0 e 1 para as variáveis livres para encontrar o espaço nulo) a dimensão do espaço nulo é $n-r$ (denominada nulidade).

A seguir, por retro substituição, encontramos os valores das variáveis pivô e está resolvido.

Espaços Vetoriais

Os quatro subespaços fundamentais

Vamos relacionar os 4 subespaços fundamentais de A com os quatro subespaços fundamentais de U . Vejamos nossas conhecidas matrizes a seguir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os espaços nulos à esquerda ($N(A^T)$)

Para uma matriz $m \times n$ seu espaço $N(A^T)$ é um subespaço em \mathbb{R}^m (colunas da A^T)

O espaço nulo das linhas de A (ao final é disso que estamos falando) é uma CL das linhas de A que resulta em zero, se escrito através de um vetor coluna y é:

$$y^T A = [y_1 \quad y_2 \quad y_3] \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

É evidente que sempre o número de colunas é igual ao número de variáveis pivô mais as livres

Espaços Vetoriais

Os quatro subespaços fundamentais

Os espaços nulos à esquerda ($N(A^T)$)

Para uma matriz $m \times n$ seu espaço $N(A^T)$ é um subespaço em \mathbb{R}^m (colunas da A^T)

O espaço nulo das linhas de A (ao final é disso que estamos falando) é uma CL das linhas de A que resulta em zero, se escrito através de um vetor coluna y é:

$$y^T A = [y_1 \quad y_2 \quad y_3] \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

Qual a dimensão de $N(A^T)$?

É evidente que sempre o número de colunas é igual ao número de variáveis pivô mais as livres!

ou seja: $r + (n-r) = n$

em outras palavras: Posto + Nulidade = n

ou: $\text{Dim } C(A) + \text{Dim } N(A) = n$

Se aplicamos esta última igualdade diretamente à matriz A^T (m colunas) teremos:

$$r + \text{Dim } N(A^T) = m \text{ de onde } \text{Dim } N(A^T) = m-r$$

Espaços Vetoriais

Os quatro subespaços fundamentais

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ Neste caso $m=n=2$ e qual é o posto r ? Neste caso $r=1$

O espaço coluna $C(A)$ é $C(A) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ Que corresponde á primeira coluna da Matriz U !!!

O espaço linha de A que é $C(A^T)$ é... São todos os múltiplos de $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, uma linha reta em \mathbb{R}^2

O espaço nulo $N(A)$ é...temos um único pivô...portanto a coluna da única variável livre é (2)

Logo dando valor 1 à variável livre teremos a solução especial que determina a matriz nula $N(A)$

Ela é uma reta no plano \mathbb{R}^2

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad N(U) = N(A) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O espaço nulo à esquerda de A : como temos uma única variável livre na A^T ...

$$N(A^T) = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

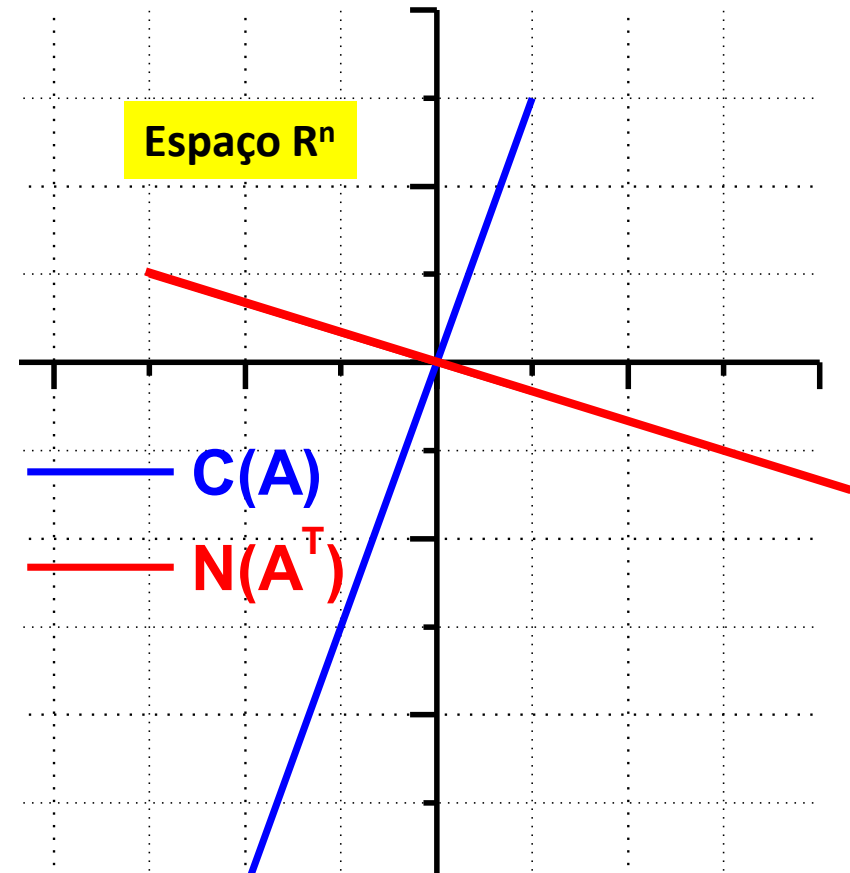
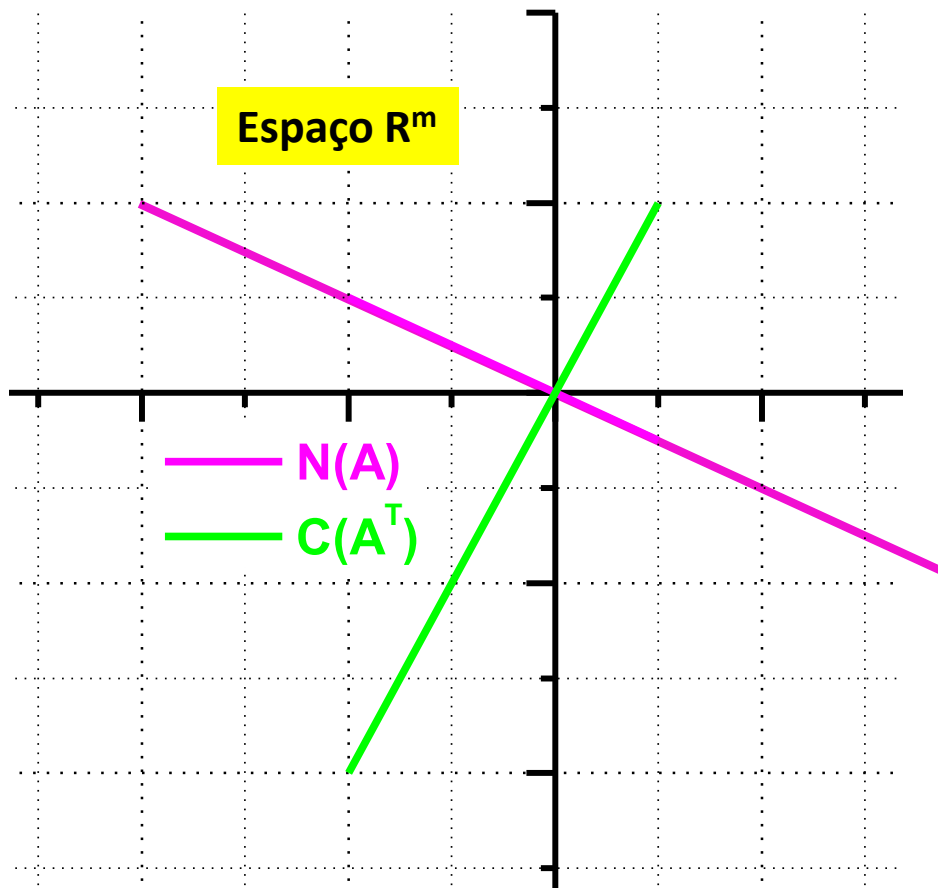
Também é uma reta em \mathbb{R}^2 (duas variáveis)

Espaços Vetoriais

Os quatro subespaços fundamentais

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ $C(A) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ Espaço linha = $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $N(A) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $N(A^T) = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Relação geométrica entre estes espaços da matriz $A(m \times n)$, são perpendiculares aos pares!!!



Exercícios

Livro Álgebra Linear e suas aplicações. Gilbert Strang. 4 edição

Página 111

Conjunto de problemas 2.4

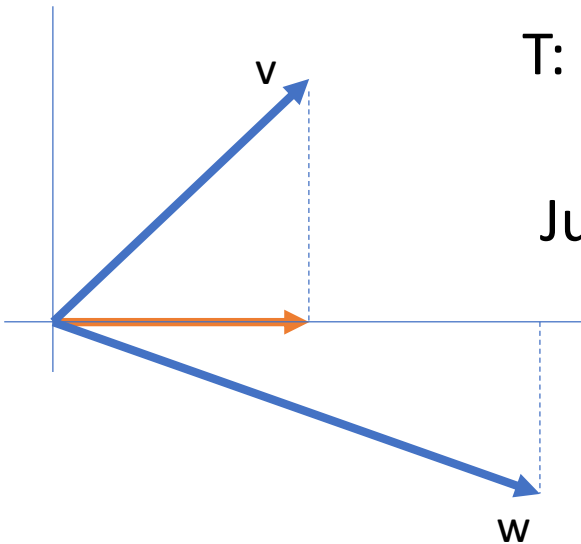
Resolver: 2; 7; 11; 18; 24; 25; 28

Espaços Vetoriais

Transformações Lineares - TL

Vamos começar com exemplos para explicar as TL

Vamos ver as projeções, por exemplo de vetores de \mathbb{R}^2 sobre o eixo das abcissas (que é um subespaço em \mathbb{R}^2)



$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ É uma TL?.... Condições para ser uma TL:

$$T(v+w) = T(v)+T(w)$$

$$T(cv) = cT(v)$$

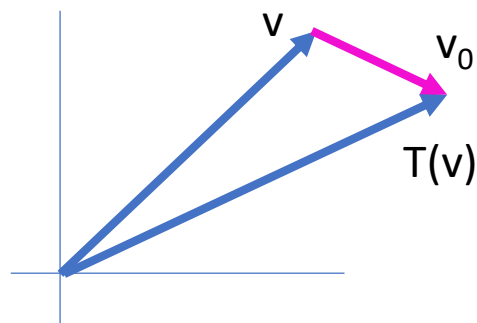
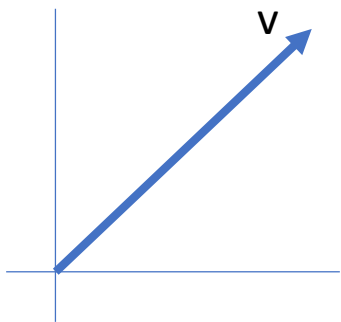
Juntando as duas condições temos para as TL: $T(cv+cw) = cT(v)+cT(w)$

Vejamus outro exemplo: o deslocamento de todo o plano pelo vetor v_0

Transforma todos os vetores do plano inicial em outros vetores...é uma TL?

Não!!! Se duplicamos v mas não duplicamos v_0 não termos 2 $T(v)$!!!

Evidentemente para que seja TL temos $T(0)=0$ o que não se cumpre neste caso!



Espaços Vetoriais

Transformações Lineares - TL

Outro exemplo: $T(v) = \|v\|$ $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$ É linear? Não! $T(cv+cw) \neq cT(v) + cT(w)$, $c < 0$

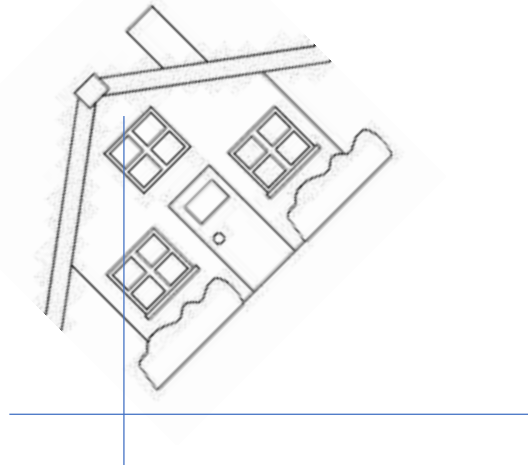
Outro exemplo: T : Rotação 45° $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é linear? Sim!

Outro exemplo: suponha uma matriz A que opera no vetor v ... $T(v) = Av$...é linear? Sim

$$A(v+w) = A(v)+A(w)$$

$$A(cv) = c(Av)$$

Outro exemplo: suponha uma casa sobre a qual opera T : Rotação 45° qual o resultado?



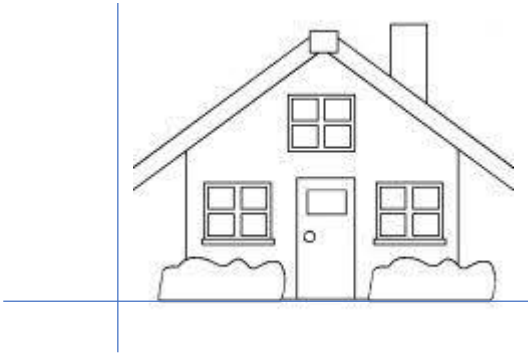
E se operamos na casa com a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

O que aconteceria com cada vetor que forma a casa?

Espaços Vetoriais

Transformações Lineares - TL



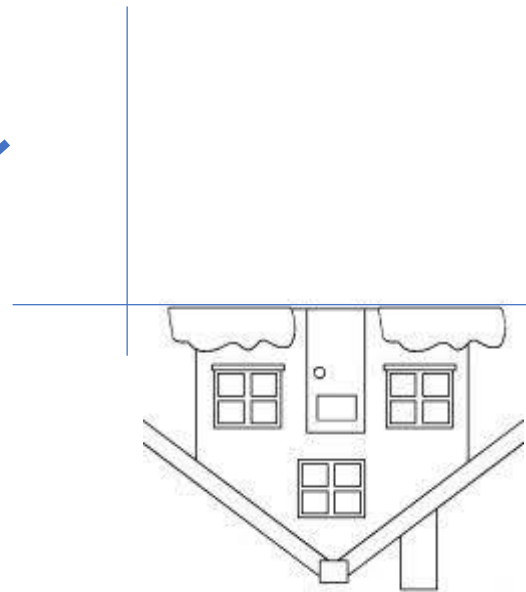
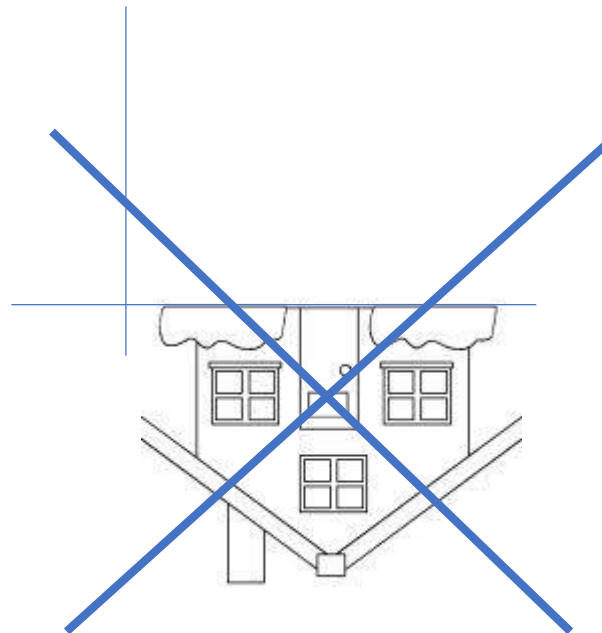
Operamos na casa com a matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

O que faz esta matriz num vetor com componentes (x,y) ?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ?$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

Então a casa vai ficar:



Espaços Vetoriais

Transformações Lineares - TL

Por trás de toda TL há uma matriz!!! Esse é nosso ponto!

Encontrar a matriz que se esconde por trás da TL!!!

Como fazer?

Vamos supor que temos uma TL que atua sobre vetores em \mathbb{R}^3 e resulta em vetores em \mathbb{R}^2 ou seja, $T:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Por exemplo, $T(v)=Av$ com uma matriz 2×3 , multiplica um vetor em \mathbb{R}^3 e resulta em vetores em \mathbb{R}^2

Agora, vamos supor que sabemos que há uma TL operando, mas não sabemos qual é essa TL específica....como podemos descobrir qual é essa TL? ou seja, qual é a matriz por trás dela?

Que informações são necessárias para que a TL esteja univocamente definida?

Se recebemos a informação de que x_1 se transformou em x'_1 é suficiente?

Não, há infinitas TL's que podem fazer isso

Se temos agora outra informação, para x_2 que se transforma em x'_2 agora é suficiente? ou vamos ter que ter infinitas informações?

Espaços Vetoriais

Transformações Lineares - TL

Se conhecemos Ax para dois vetores LI conhecemos Ax (ou seja, a transformação linear) para cada vetor do espaço definido pelos dois vetores LI

Por quê?

Pela propriedade já conhecida de que $A(cx)=cAx$ e $A(x+y)=Ax+Ay$ portanto podemos construir a transformação de qualquer vetor desse espaço definido por essas bases!!!

Portanto se conhecemos como a TL atua sobre a base de um espaço R^n saberemos como a TL transforma qualquer vetor desse espaço, portanto temos todo o que precisamos para descobrir a matriz da TL!

Ok, vamos construir a matriz A que executa a TL denominada T definida pelo que sabemos sobre como opera nas bases do espaço. Vamos supor que a T faz $T:R^n \rightarrow R^m$

Aqui temos duas bases, a dos vetores R^n de entrada e a dos vetores R^m de saída

Vamos fazer o seguinte: vamos tomar qualquer vetor v e expressar ele como uma CI da sua base: $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$

Sobre ele vai operar nossa matriz desconhecida A e transformar este vetor no vetor $w = d_1w_1 + d_2w_2 + \dots + d_mw_m \dots$

Espaços Vetoriais

Transformações Lineares - TL

Qual a matriz A que faz isso?

Vamos colocar um exemplo concreto, vamos supor que sabemos que:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ se transforma em } Ax_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ se transforma em } Ax_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

A pergunta é qual A faz isso?

Evidentemente (por ser uma CL de colunas)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Vejam os casos dos espaços P_n dos polinômios de grau n : $p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$

A operação de diferenciação é linear? $A \equiv d/dt$

Qual a dimensão do espaço coluna de A para um polinômio de grau n ? n (do P_{n-1} que resulta da diferenciação)

Qual é o espaço nulo dessa A? O espaço unidimensional das constantes!

Qual é o posto? n - a dimensão do polinômio original (pois perde 1 grau na diferenciação)

O primeiro passo para encontrar A é encontrar a base do espaço do domínio!

Espaços Vetoriais

Transformações Lineares - TL

Na diferenciação de polinômios a base natural dos polinômios é $1, t, t^2, \dots, t^n$ ($n+1$ vetores)

As derivadas destes $n+1$ vetores são $0, 1, 2t, \dots, nt^{n-1}$...por isso a base de terá n vetores

Vejamos o caso dos polinômios de grau 3.....neste caso teremos 4 vetores base no espaço dos polinômios (domínio) $1, t, t^2$ e t^3

As derivadas destes 4 vetores são $0, 1, 2t$ e $3t^2$ que são a base do espaço imagem

A matriz A (diferenciação) faz o seguinte entre estes dois espaços (suas bases incluídas):

$$Ap_1=0 \quad Ap_2=p_1 \quad Ap_3=2p_2 \quad e \quad Ap_4=3p_3$$

A operação “diferenciar” (derivar) atua como uma matriz!, mas qual é a matriz?

Para isso precisamos da base Escolhemos: $p_1(1,0,0,0)$; $p_2(0,1,0,0)$; $p_3(0,0,1,0)$; $p_4(0,0,0,1)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [1 \quad t \quad t^2 \quad t^3] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad 1 \quad 2t \quad 3t^2]$$

Espaços Vetoriais

Transformações Lineares - TL

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ap_1 deu a primeira coluna (0000)

$Ap_2=p_1$ dá a segunda coluna

$Ap_3=2p_2$

$Ap_4=3p_3$

Esta matriz A deriva qualquer polinômio de grau 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo: $2+t-t^2-t^3$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 1-2t-3t^2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A regra, para construir a matriz A, coluna por coluna, é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Coluna j de A é a $T(x_j) = a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m$

Ou seja, aplicamos a TL ao j-ésimo **vetor base** x_j (do espaço de partida) e o escrevemos como um CL da **base da imagem**