Conjunto de problemas 5.3

1. Bernardelli estudou um besouro "que vive apenas três anos e se reproduz em seu último ano de vida". Eles sobrevivem o primeiro ano com probabilidade $\frac{1}{2}$, o segundo com probabilidade $\frac{1}{3}$ e, então, produzem seis fêmeas antes de morrer:

$$\textbf{Matriz do besouro} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Mostre que $A^3 = I$ e siga a distribuição de 3.000 besouros num período de seis anos.

2. Para a matriz de Fibonacci $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, calcule A^2, A^3 e A^4. Em seguida, utilize os conceitos vistos neste capítulo e uma calculadora para encontrar F_{20}.

3. Prove que todo terceiro número de Fibonacci F_{3k} (K ≥ 0) em 0, 1, 1, 2, 3, … é par.

4. Diagonalize a matriz de Fibonacci completando S^{-1}:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}.$$

Faça a multiplicação $S\Lambda^k S^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ para encontrar seu segundo componente. Este é o k-ésimo número de Fibonacci $F_k = (\lambda_1^k - \lambda_2^k)(\lambda_1 - \lambda_2)$.

5. Suponha que cada número de "Gibonacci" G_{k+2} seja a *média* dos dois números anteriores G_{k+1} e G_k. Então, $G_{k+2} = \frac{1}{2}(G_{k+1} + G_k)$:

$$\begin{aligned} G_{k+2} &= \tfrac{1}{2}G_{k+1} + \tfrac{1}{2}G_k \\ G_{k+1} &= G_{k+1} \end{aligned} \qquad \text{é} \qquad \begin{bmatrix} G_{k+2} \\ G_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & A & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{k+1} \\ G_k \end{bmatrix}.$$

(a) Encontre os autovalores e os autovetores de A.

(b) Encontre o limite conforme $n \to \infty$ das matrizes $A^n = S\Lambda^n S^{-1}$.

(c) Se $G_0 = 0$ e $G_1 = 1$, mostre que os números de Gibonacci tendem a $\frac{2}{3}$.

6. Suponha que haja uma epidemia em que todo mês metade das pessoas saudáveis fique doente e um quarto das que estão doentes morra. Encontre o estado estacionário do processo de Markov correspondente:

$$\begin{bmatrix} d_{k+1} \\ s_{k+1} \\ w_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_k \\ s_k \\ w_k \end{bmatrix}.$$

7. Os números λ_1^k e λ_2^k satisfazem a regra de Fibonacci $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$:

$$\lambda_1^{k+2} = \lambda_1^{k+1} + \lambda_1^k \quad \text{e} \quad \lambda_2^{k+2} = \lambda_2^{k+1} + \lambda_2^k.$$

Prove isto utilizando a equação original para os λ (multiplique por λ^k). Em seguida, qualquer combinação de λ_1^k e λ_2^k satisfaz a regra. A combinação $F_k = (\lambda_1^k - \lambda_2^k/(\lambda_1 - \lambda_2)$ fornece o ponto de partida certo de $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

8. Lucas começou com $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$. A regra $L_{k+2} = L_{k+1} + L_k$ é a mesma, de modo que A ainda é uma matriz de Fibonacci. Some seus autovetores $x_1 + x_2$:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_0 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando-se por A^k, o segundo componente é $L_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k$. Calcule o número de Lucas L_{10} lentamente por $L_{k+2} = L_{k+1} + L_k$ e aproximadamente por λ_1^{10}.

9. Encontre os valores-limites de y_k e z_k ($k \to \infty$) se:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= 0{,}8y_k + 0{,}3z_k \qquad & y_0 &= 0 \\ z_{k+1} &= 0{,}2y_k + 0{,}7z_k \qquad & z_0 &= 5. \end{aligned}$$

Encontre também as fórmulas para y_k e z_k a partir de $A^k = S\Lambda^k S^{-1}$.

10. Apresente a matriz de transição 3 por 3 para um curso de Química que é ministrado em dois turnos, se a cada semana $\frac{1}{4}$ das pessoas no turno A e $\frac{1}{3}$ das no turno B desistem do curso e $\frac{1}{6}$ de cada turno se transfere para o outro.

11. Empresas multinacionais na América, Ásia e Europa possuem bens de US$ 4 trilhões. No princípio, US$ 2 trilhões estão na América e US$ 2 trilhões na Europa. A cada ano, $\frac{1}{2}$ do dinheiro na América é mantida e $\frac{1}{4}$ vai para a Ásia e Europa. Para a Ásia e Europa, $\frac{1}{2}$ é mantida e $\frac{1}{2}$ é enviada para a América.

(a) Encontre a matriz que forneça:

$$\begin{bmatrix} \text{América} \\ \text{Ásia} \\ \text{Europa} \end{bmatrix}_{\text{ano } k+1} = A \begin{bmatrix} \text{América} \\ \text{Ásia} \\ \text{Europa} \end{bmatrix}_{\text{ano k}}.$$

(b) Encontre os autovalores e os autovetores de A.

(c) Encontre a distribuição limite dos US$ 4 trilhões quando o mundo acabar.

(d) Encontre a distribuição dos US$ 4 trilhões no ano k.

12. Se A é uma matriz de Markov, mostre que a soma dos componentes de Ax é igual à soma dos componentes de x. Suponha que, se $Ax = \lambda x$ com $\lambda \neq 1$, os componentes do autovetor são nulos.

13. Suponha que haja três centros principais para caminhões do tipo "faça a mudança você mesmo". Todo mês, metade desses caminhões em Boston e Los Angeles vai para Chicago, a outra metade permanece onde está e os caminhões de Chicago se dividem entre Boston e Los Angeles. Determine a matriz de transição A 3 por 3 e encontre o estado estacionário u_∞ que corresponde ao autovalor $\lambda = 1$.

14. (a) A partir do fato de que coluna 1 + coluna 2 = 2 (coluna 3), de modo que as colunas são linearmente dependentes, encontre um autovalor e um autovetor de A:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix}.$$

(b) Encontre os outros autovalores de A (ela é de Markov).

(c) Se $u_0 = (0, 10, 0)$, encontre o limite de $A^k u_0$ conforme $k \to \infty$.

15. A solução para $du/dt = Au = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u$ (autovalores i e $-i$) gira em um círculo: $u = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Suponha que aproximemos du/dt por diferenças progressivas, regressivas e centralizadas **P**, **R**, **C**:

(P) $u_{n+1} - u_n = Au_n$ ou $u_{n+1} = (I + A)u_n$ (este é o método de Euler).

(R) $u_{n+1} - u_n = Au_{n+1}$ ou $u_{n+1} = (I - A)^{-1}u_n$ (Euler regressivo).

(C) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}A(u_{n+1} + u_n)$ ou $u_{n+1} = \left(I - \frac{1}{2}A\right)^{-1}\left(I + \frac{1}{2}A\right)u_n$.

Encontre os autovalores de $I + A$, $(I - A)^{-1}$ e $\left(I - \frac{1}{2}A\right)^{-1}\left(I + \frac{1}{2}A\right)$. Para qual equação das diferenças a solução u_n permanece no círculo?

16. (a) Em que faixa de a e b a equação abaixo é um processo de Markov?

$$u_{k+1} = Au_k = \begin{bmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{bmatrix} u_k, \qquad u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Calcule $u_k = S\Lambda^k S^{-1}u_0$ para qualquer a e b.

(c) Em que condição de a e b, u_k tende a um limite infinito conforme $k \to \infty$, e qual é este limite? A precisa ser uma matriz de Markov?

17. Multiplicando termo por termo, verifique se $(I-A)(I+A+A^2+\cdots)=I$. Esta série representa $(I-A)^{-1}$. Ela é não negativa quando A é não negativa, contanto que ela possua uma soma finita; a condição para isto é $\lambda_{\text{máx}} < 1$. Some as séries infinitas e confirme se ela é igual a $(I-A)^{-1}$ para a matriz de consumo:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix} \qquad \text{que possui } \lambda_{\text{máx}}=0.$$

18. Explique matemática ou economicamente por que o aumento da "matriz de consumo" A deve aumentar $t_{\text{máx}}=\lambda_1$ (e desacelerar a expansão).

19. Quais valores de α produzem instabilidade em $v_{n+1}=\alpha(v_n+w_n)$, $w_{n+1}=\alpha(v_n+w_n)$?

20. Quais são os limites conforme $k\to\infty$ (o estado estacionário) das seguintes matrizes?

$$\begin{bmatrix}0{,}4&0{,}2\\0{,}6&0{,}8\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}0{,}4&0{,}2\\0{,}6&0{,}8\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}0{,}4&0{,}2\\0{,}6&0{,}8\end{bmatrix}^k.$$

21. Encontre os maiores valores de a, b e c para os quais essas matrizes sejam estáveis ou neutramente estáveis:

$$\begin{bmatrix}a&-0{,}8\\0{,}8&0{,}2\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}b&0{,}8\\0&0{,}2\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}c&0{,}8\\0{,}2&c\end{bmatrix}.$$

22. Para $A=\begin{bmatrix}0&0{,}2\\0&0{,}5\end{bmatrix}$, encontre as potências A^k (incluindo A^0) e mostre explicitamente que suas somas são compatíveis com $(I-A)^{-1}$.

Os problemas 23 a 29 são sobre $A=S\Lambda S^{-1}$ e $A^k=S\Lambda^k S^{-1}$

23. Os autovalores de A são 1 e 9, os de B são −1 e 9:

$$A=\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B=\begin{bmatrix}4&5\\5&4\end{bmatrix}.$$

Encontre uma raiz quadrada matricial de A a partir de $R=S\sqrt{\Lambda}S^{-1}$. Por que não existe raiz quadrada matricial real de B?

24. Suponha que A e B possuam o mesmo conjunto completo de autovetores, de modo que $A=S\Lambda_1S^{-1}$ e $B=S\Lambda_2S^{-1}$. Prove que $AB=BA$.

25. Diagonalize B e calcule $S\Lambda^kS^{-1}$ para provar essa fórmula para B^k:

$$B=\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix} \qquad \text{possui} \qquad B^k=\begin{bmatrix}3^k&3^k-2^k\\0&2^k\end{bmatrix}.$$

26. (a) Quando o autovetor de $\lambda=0$ gera o espaço nulo $\boldsymbol{N}(A)$?

(b) Quando todos os autovetores de $\lambda\neq 0$ geram o espaço-coluna $\boldsymbol{C}(A)$?

27. Diagonalize A e calcule $S\Lambda^kS^{-1}$ para provar essa fórmula para A^k:

$$A=\begin{bmatrix}3&2\\2&3\end{bmatrix} \qquad \text{possui} \qquad A^k=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}5^k+1&5^k-1\\5^k-1&5^k+1\end{bmatrix}.$$

28. Se A e B possuem os mesmos valores de λ com o mesmo conjunto completo de autovetores independentes, suas fatorações em _______ são as mesmas. Portanto $A=B$.

29. As potências A^k tendem a zero se todos os $|\lambda_i| < 1$ e aumentam se qualquer $|\lambda_i| > 1$. Peter Lax fornece quatro exemplos notáveis em seu livro *Linear Algebra*.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 5 & 6{,}9 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\|A^{1.024}\| > 10^{700} \qquad B^{1.024} = I \qquad C^{1.024} = -C \qquad \|D^{1.024}\| < 10^{-78}$$

Encontre os autovalores $\lambda = e^{i\theta}$ de B e C para mostrar que $B^4 = I$ e $C^3 = -I$.