Conjunto de problemas 5.1

1. Encontre os autovalores e os autovetores da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Verifique que o traço é igual à soma dos autovalores e o determinante é igual ao seu produto.

2. Com a mesma matriz A, resolva a equação diferencial $du/dt = Au$, $u(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$. Quais são as duas soluções exponenciais puras?

3. Se mudarmos para $A - 7I$, quais serão os autovalores e os autovetores e como eles estão relacionados aos de A?

$$B = A - 7I = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

4. Dê um exemplo para demonstrar que os autovalores podem ser alterados quando um múltiplo de uma linha é subtraído de outra. Por que um autovalor nulo *não* é alterado pelas etapas de eliminação?

5. Resolva $du/dt = Pu$, quando P é uma projeção:

$$\frac{du}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} u \quad \text{com} \quad u(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Parte de $u(0)$ aumenta exponencialmente, enquanto a parte do espaço nulo permanece fixa.

6. Mostre que o determinante é igual ao produto dos autovalores, imaginando que o polinômio característico seja fatorado em

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda), \tag{16}$$

e fazendo uma escolha conveniente de λ.

7. Encontre os autovalores e os autovetores de:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Verifique que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ é igual ao traço e $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ é igual ao determinante.

8. Suponha que λ seja um autovalor de A e x seja seu autovetor: $Ax = \lambda x$.

(a) Mostre que esse mesmo x é um autovetor de $B = A - 7I$ e encontre o autovalor. Isto deve confirmar o problema 3.

(b) Considerando $\lambda \neq 0$, mostre que x também é um autovetor de A^{-1} – e encontre o autovalor.

9. ***Os autovalores de* A *são iguais aos autovalores de* A$^{\mathrm{T}}$**. Isto se deve a $\det(A - \lambda I)$ ser igual a $\det(A^{\mathrm{T}} - \lambda I)$. Isso é verdadeiro porque ________. Mostre, por meio de um exemplo, que os autovetores de A e A^{T} *não* são iguais.

10. Mostre que o traço é igual à soma dos autovalores em duas etapas. Primeiro, encontre o coeficiente de $(-\lambda)^{n-1}$ do lado direito da equação (16). Em seguida, encontre todos os termos de

$$\det\,(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

que envolvam $(-\lambda)^{n-1}$. Todos eles aparecem na diagonal principal! Encontre aquele coeficiente de $(-\lambda)^{n-1}$ e faça uma comparação.

11. (a) Construa matrizes 2 por 2 de modo que os autovalores de AB não sejam os produtos dos autovalores de A e B, e os autovalores de $A + B$ não sejam a soma dos autovalores individuais.

(b) Verifique, no entanto, que a soma dos autovalores de $A + B$ é igual à soma de todos os autovalores individuais de A e B, assim como seus produtos. Por que isto é verdadeiro?

12. Se B possui autovalores 1, 2, 3, C possui autovalores 4, 5, 6 e D possui autovalores 7, 8, 9, quais são os autovalores da matriz 6 por 6 $A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$?

13. Escolha a terceira linha da "matriz companheira"

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

de modo que seu polinômio característico $|A - \lambda I|$ seja $-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 6$.

14. Quais são o posto e os autovalores quando A e C do problema anterior são n por n? Lembre-se de que o autovalor $\lambda = 0$ é repetido $n - r$ vezes.

15. Encontre os autovalores e os autovetores de:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

16. Encontre o posto e todos os quatro autovalores da matriz de um e da matriz quadriculada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quais autovetores correspondem aos autovalores não nulos?

17. As potências de A^k dessa matriz A tendem a um limite quando $k \to \infty$:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0{,}70 & 0{,}45 \\ 0{,}30 & 0{,}55 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad A^\infty = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix}.$$

A matriz A^2 está na metade do caminho entre A e A^∞. Explique por que $A^2 = \frac{1}{2}(A + A^\infty)$ a partir dos autovalores e dos autovetores dessas três matrizes.

18. Se A é a matriz 4 por 4 de números 1, encontre os autovalores e o determinante de $A - I$.

19. Encontre os autovalores e os autovetores das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A + I = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$A + I$ possui os _______ autovetores de A. Seus autovalores são _______ de 1.

20. Suponha que A possua autovalores 0, 3, 5 com autovetores independentes u, v, w.

(a) Forneça uma base para o espaço nulo e uma base para o espaço-coluna.

(b) Encontre uma solução particular para $Ax = v + w$. Encontre todas as soluções.

(c) Mostre que $Ax = u$ não possui solução (se possuísse uma solução, então _______ estaria no espaço-coluna).

21. (a) Se você sabe que x é um autovetor, o modo de encontrar λ é _______.

(b) Se você sabe que λ é um autovalor, o modo de encontrar x é _______.

22. Calcule os autovalores e os autovetores de A e A^{-1}:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -3/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A^{-1} possui os _______ autovetores de A. Quando A possui autovalores λ_1 e λ_2, sua inversa possui autovalores _______.

23. A partir do vetor unitário $u = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{6}, \frac{5}{6}\right)$, construa a matriz de projeção de posto 1 $P = uu^{\mathrm{T}}$.

(a) Mostre que $Pu = u$. Então, u é um autovetor com $\lambda = 1$.

(b) Se v é perpendicular a u, mostre que $Pv =$ vetor nulo. Então, $\lambda = 0$.

(c) Encontre três autovetores independentes de P, todos com autovalor $\lambda = 0$.

24. Toda matriz de permutação deixa $x = (1, 1, ..., 1)$ inalterado. Então, $\lambda = 1$. Encontre mais dois λs para as seguintes permutações:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

25. Calcule os autovalores e os autovetores de A e A^2:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

A^2 possui os mesmos _______ de A. Quando A possui autovalores λ_1 e λ_2, A^2 possui autovalores _______.

26. Se A possui $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 5$, então $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 4)(\lambda - 5) = \lambda^2 - 9\lambda + 20$. Encontre três matrizes que tenham traço $a + d = 9$, determinante 20 e $\lambda = 4, 5$.

27. O que você deve fazer com $Ax = \lambda x$ para provar (a), (b) e (c)?

(a) λ^2 é um autovalor de A^2, como no problema 25.

(b) λ^{-1} é um autovalor de A^{-1}, como no problema 22.

(c) $\lambda + 1$ é um autovalor de $A + I$, como no problema 19.

28. Resolva $\det(Q - \lambda I) = 0$ por meio da fórmula quadrática para obter $\lambda = \cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta$:

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{rotaciona o plano } xy \text{ por um ângulo } \theta.$$

Encontre os autovetores de Q, resolvendo $(Q - \lambda I)x = 0$. Utilize $i^2 = -1$.

29. Sabe-se que uma matriz B 3 por 3 possui autovalores 0, 1, 2. Esta informação é suficiente para encontrar três dos seguintes itens:

(a) o posto de B,

(b) o determinante de $B^{\mathrm{T}}B$,

(c) os autovalores de $B^{\mathrm{T}}B$, e

(d) os autovalores de $(B + I)^{-1}$.

30. Esta matriz é singular com posto 1. Encontre três valores de λ e três autovetores:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

31. (Revisão) Encontre os autovalores de A, B e C:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

32. Escolha a, b e c, de modo que $\det(A - \lambda I) = 9\lambda - \lambda^3$. Então, os autovalores são -3, 0, 3:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix}.$$

33. Há seis matrizes de permutação P 3 por 3. Quais números podem ser os *determinantes* de P? Quais números podem ser os *pivôs*? Quais números podem ser o *traço* de P? Quais *quatro números* podem ser autovalores de P?

34. Quando P troca as *linhas* 1 e 2 e as *colunas* 1 e 2, os autovalores não se alteram. Encontre autovetores de A e PAP para $\lambda = 11$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad PAP = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

35. Escolha a segunda linha de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix}$ de modo que A possua autovalores 4 e 7.

36. Encontre três matrizes 2 por 2 que tenham $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. O traço e o determinante são nulos. A matriz A pode não ser 0, mas verifique se $A^2 = 0$.

37. Desafio: *existe uma matriz real 2 por 2* (diferente de I) *com* $A^3 = I$? Seus autovalores devem satisfazer $\lambda^3 = 1$. Eles podem ser $e^{2\pi i/3}$ e $e^{-2\pi i/3}$. Em que traço e determinante isto resultaria? Construa A.

38. Suponha que A e B possuam os mesmos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ com os mesmos autovetores independentes $x_1, \ldots, x_n$. Então $A = B$. *Motivo*: qualquer vetor x é uma combinação $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$. Qual é Ax? Qual é Bx?

39. Quando $a + b = c + d$, mostre que (1, 1) é um autovetor e encontre ambos os autovalores:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

40. Construa qualquer matriz de Markov M 3 por 3: os elementos positivos ao longo de cada coluna somam 1. Se $e = (1, 1, 1)$, verifique que $M^{\mathrm{T}}e = e$. Pelo problema 9, $\lambda = 1$ também é um autovalor de M. Desafio: uma matriz de Markov singular 3 por 3 com traço $\frac{1}{2}$ possui autovalores $\lambda =$ _______.