## Conjunto de problemas 2.4

**1.** Descreva os quatro subespaços no espaço tridimensional associado a:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**2.** Encontre a dimensão e uma base dos quatro subespaços fundamentais para:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**3.** Encontre a dimensão e construa uma base para os quatro subespaços associados a cada uma das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**4.** Se o produto $AB$ é a matriz nula, $AB = 0$, isso mostra que o espaço-coluna de $B$ está contido no espaço nulo de $A$ (o espaço-linha de $A$ também é o espaço nulo à esquerda de $B$, já que cada linha de $A$ multiplica $B$ para obter uma linha nula).

**5.** Verdadeiro ou falso: se $m = n$, então o espaço-linha de $A$ é igual ao espaço-coluna. Se $m < n$, então o espaço nulo possui uma dimensão maior do que _______.

**6.** Encontre o posto de $A$ e apresente a matriz como $A = uv^{\mathrm{T}}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}.$$

**7.** Se as colunas de $A$ são linearmente inde  ão o posto é _______, o espaço nulo é _______, o espaço-linha é _______ e existe uma inversa à _______.

**8.** Se $Ax = b$ sempre possui pelo menos uma solução, mostre que a única solução de $A^{\mathrm{T}}y = 0$ é $y = 0$. *Dica*: qual é o posto?

**9.** Encontre (quando existirem) uma inversa à esquerda e/ou uma inversa à direita para:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

**10.** Suponha que $A$ é uma matriz $m$ por $n$ de posto $r$. Em quais condições desses números:

(a) $A$ possui uma inversa de dois lados: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$?

(b) $Ax = b$ possui *infinitas* soluções para *todo* $b$?

**11.** Encontre uma matriz $A$ que possua $\mathbf{V}$ como seu espaço-linha e uma matriz $B$ que possua $\mathbf{V}$ como seu espaço-coluna, se $\mathbf{V}$ é o subespaço gerado por:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**12.** Por que não existe matriz quando tanto o espaço-linha quanto o espaço nulo contêm $(1, 1, 1)$?

**13.** Encontre uma base para cada um dos quatro subespaços de:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**14.** Se $a, b, c$ são dados com $a \neq 0$, escolha $d$ tal que

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = uv^{\mathrm{T}}$$

possua posto 1. Quais são os pivôs?

**15.** (*Um paradoxo*) Suponha que $A$ tenha uma inversa à direita $B$. Então, $AB = I$ leva a $A^{\mathrm{T}}AB = A^{\mathrm{T}}$ ou $B = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}$. Mas ela satisfaz $BA = I$; trata-se de uma inversa *à esquerda*. Que etapa não se justifica?

**16.** Se $Ax = 0$ possui uma solução não nula, mostre que $A^{\mathrm{T}}y = f$ não é solúvel para alguns lados direitos $f$. Construa um exemplo de $A$ e $f$.

**17.** Suponha que a única solução $Ax = 0$ ($m$ equações de $n$ incógnitas) seja $x = 0$. Qual é o posto? Justifique sua resposta. As colunas de $A$ são linearmente ________.

**18.** Encontre uma matriz 1 por 3 cujo espaço nulo consista de todos os vetores em $\mathbf{R}^3$, de modo que $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$. Encontre uma matriz 3 por 3 com esse mesmo espaço nulo.

**19.** Construa uma matriz com $(1, 0, 1)$ e $(1, 2, 0)$ como base para seu espaço-linha e seu espaço--coluna. Por que isso não pode ser uma base 13 de abr de 2020 16:47 ço nulo?

**20.** Suponha que a matriz $A$ 3 por 3 seja invertível. Apresente bases para os quatro subespaços de $A$ e também para a matriz 3 por 6 $B = [A \;\; A]$.

**21.** Se $A$ possui os mesmos quatro subespaços fundamentais de $B$, então $A = cB$?

**22.** Se os elementos de uma matriz 3 por 3 são escolhidos aleatoriamente entre 0 e 1, quais são as dimensões mais prováveis dos quatro subespaços? E se a matriz for 3 por 5?

**23.** (Importante) $A$ é uma matriz $m$ por $n$ de posto $r$. Suponha que haja lados direitos $b$ para os quais $Ax = b$ *não tenha solução*.

(a) Quais desigualdades ($<$ ou $\leq$) devem ser verdadeiras entre $m$, $n$ e $r$?

(b) Como é possível saber que $A^{\mathrm{T}}y = 0$ possui uma solução não nula?

**24.** Construa uma matriz com a propriedade solicitada ou explique por que não é possível fazê-lo.

(a) O espaço-coluna contém $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, o espaço-linha contém $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

(b) O espaço-coluna possui base $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, o espaço nulo possui base $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) Dimensão do espaço nulo $= 1 +$ dimensão do espaço nulo à esquerda.

(d) O espaço nulo à esquerda contém $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, o espaço-linha contém $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(e) Espaço-linha = espaço-coluna, espaço nulo $\neq$ espaço nulo à esquerda.

**25.** Quais subespaços são iguais para essas matrizes de dimensões diferentes?

(a) $[A]$ e $\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}$.

Prove que todas essas matrizes possuem o mesmo posto $r$.

**26.** Quais são as dimensões dos quatro subespaços de $A$, $B$ e $C$, se $I$ for a matriz identidade 3 por 3 e 0 for a matriz nula 3 por 2?

$$A = [I \quad 0] \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} I & I \\ 0^{\mathrm{T}} & 0^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = [0].$$

**27.** (a) Se uma matriz 7 por 9 possui posto 5, quais são as dimensões dos quatro subespaços? Qual é a soma de todas as quatro dimensões?

(b) Se uma matriz 3 por 4 possui posto 3, quais são seu espaço-coluna e seu espaço nulo à esquerda?

**28.** Sem calcular $A$, encontre bases para os quatro subespaços fundamentais:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**29.** Sem eliminação, encontre dimensões e bases para os quatro subespaços de:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & [illegible] \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \\ [illegible] & [illegible] \end{bmatrix}$$



**30.** (Espaço nulo à esquerda) Some a coluna adicional $b$ e reduza $A$ à forma escalonada:

$$[A \quad b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 4 & 5 & 6 & b_2 \\ 7 & 8 & 9 & b_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & -3 & -6 & b_2 - 4b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_2 + b_1 \end{bmatrix}.$$

Uma combinação das linhas de $A$ produziu a linha nula. Que combinação é essa (observe $b_3 - 2b_2 + b_1$ do lado direito)? Quais vetores estão no espaço nulo de $A^{\mathrm{T}}$ e quais estão no espaço nulo de $A$?

**31.** Seguindo o método do Problema 30, reduza $A$ à forma escalonada e observe as linhas nulas. A coluna $b$ mostra que combinações de linhas você fez:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 3 & 4 & b_2 \\ 4 & 6 & b_3 \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 2 & 3 & b_2 \\ 2 & 4 & b_3 \\ 2 & 5 & b_4 \end{bmatrix}$.

A partir da coluna $b$ após a eliminação, apresente os $m - r$ vetores-bases no espaço nulo de $A$ (combinações de linhas que resultem em zero).

**32.** Verdadeiro ou falso? Se for falso, dê um contraexemplo.

(a) $A$ e $A^{\mathrm{T}}$ possuem o mesmo número de pivôs.

(b) $A$ e $A^{\mathrm{T}}$ possuem o mesmo espaço nulo à esquerda.

(c) Se o espaço-linha é igual ao espaço-coluna, então $A^T = A$.

(d) Se $A^T = -A$, então o espaço-linha de $A$ é igual ao espaço-coluna.

**33.** Se você trocar as primeiras duas linhas de uma matriz $A$, quais dos quatro subespaços permanecerão iguais? Se $y = (1, 2, 3, 4)$ está no espaço nulo à esquerda de $A$, apresente um vetor no espaço nulo à esquerda da nova matriz.

**34.** Sem multiplicar as matrizes, encontre bases para o espaço-linha e o espaço-coluna de $A$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como é possível saber, a partir desses formatos, que $A$ não é invertível?

**35.** Explique por que $v = (1, 0, -1)$ não pode ser uma linha de $A$ e também estar em um espaço nulo.

**36.** Descreva os quatro subespaços de $\mathbf{R}^3$ associados a:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I + A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**37.** Suponha que $A$ seja a soma de duas matrizes de posto 1: $A = uv^T + wz^T$.

(a) Quais vetores geram o espaço-coluna de $A$?

(b) Quais vetores geram o espaço-linha de $A$?

(c) O posto é inferior a 2 se _______ ou se



(d) Calcule $A$ e seu posto se $u = z = (1, 0, 0)$ e $v = w = (0, 0, 1)$.

**38.** Redesenhe a Figura 2.5 para uma matriz 3 por 2 de posto $r = 2$. Qual subespaço é $\mathbf{Z}$ (apenas o vetor nulo)? A parte do espaço nulo de qualquer vetor $x$ em $\mathbf{R}^2$ é $x_n =$ _______.

**39.** Construa qualquer matriz 2 por 3 de posto 1. Copie a Figura 2.5 e posicione um vetor em cada subespaço (dois no espaço nulo). Quais vetores são ortogonais?

**40.** Se $AB = 0$, as colunas de $B$ são os espaços nulos de $A$. Se esses vetores estão em $\mathbf{R}^n$, prove que posto$(A)$ + posto$(B) \leq n$.

**41.** Um jogo da velha pode ser completado (5 números 1 e 4 zeros em $A$), de modo que posto$(A) = 2$, mas nenhum lado possa realizar uma jogada vitoriosa?