Conjunto de problemas 2.2

1. Encontre o valor de c que torna possível resolver $Ax = b$ e resolva o sistema:

$$\begin{aligned} u + v + 2w &= 2 \\ 2u + 3v - w &= 5 \\ 3u + 4v + w &= c. \end{aligned}$$

2. Encontre a forma escalonada U, as variáveis livres e as soluções especiais:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

$Ax = b$ é consistente (possui uma solução) quando b satisfaz $b_2 =$ _______. Encontre a solução correta na mesma forma da equa

3. Construa um sistema com mais incógnitas do que equações, mas sem solução. Altere o lado direito para zero e encontre todas as soluções x_n.

4. Apresente as soluções completas $x = x_p + x_n$ a esses sistemas, como na equação (4):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

5. Reduza A e B para a forma escalonada a fim de encontrar seus postos. Que variáveis são livres?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Encontre as soluções especiais de $Ax = 0$ e $Bx = 0$. Encontre todas as soluções.

6. Execute as mesmas etapas do problema anterior para encontrar a solução completa de $Mx = b$:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

7. Descreva o conjunto de lados direitos b possíveis (no espaço-coluna) para

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

encontrando as restrições de b que transformam a terceira equação em $0 = 0$ (após a eliminação). Determine o posto e uma solução particular.

8. Encontre R para essas matrizes (de bloco) e as soluções especiais:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

9. Encontre um sistema 2 por 3 $Ax = b$ cuja solução completa seja:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Encontre um sistema 3 por 3 com essas soluções, exatamente, quando $b_1 + b_2 = b_3$.

10. Quais dessas regras fornecem a definição correta do *posto* de A?

(a) O número de linhas não nulas de R.

(b) O número de colunas menos o número t

13 de abr de 2020 16:47

(c) O número de colunas menos o número de colunas livres.

(d) O número de números 1 em R.

11. Se as variáveis pivôs r vierem primeiro, a reduzida R deve ter o seguinte aspecto:

$$R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} I \text{ é } r \text{ por } r \\ F \text{ é } r \text{ por } n - r \end{matrix}$$

Qual é a matriz de espaço nulo N que contém as soluções especiais?

12. Em que condições de b_1 e b_2 (se houver) $Ax = b$ tem uma solução?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Encontre dois vetores do espaço nulo de A e a solução completa de $Ax = b$.

13. (a) Encontre as soluções especiais de $Ux = 0$. Reduza U a R e repita:

$$Ux = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Se o lado direito for alterado a partir de $(0, 0, 0)$ para $(a, b, 0)$, quais são todas as soluções?

14. Apresente o sistema 2 por 2 $Ax = b$ com muitas soluções x_n mas nenhuma solução x_p (portanto, o sistema não tem solução). Quais valores de b permitem x_p?

15. Encontre as formas escalonadas reduzidas por linha R e o posto dessas matrizes:

(a) A matriz 3 por 4, de elementos iguais a 1.

(b) A matriz 4 por 4 com $a_{ij} = (-1)^{ij}$.

(c) A matriz 3 por 4 com $a_{ij} = (-1)^{j}$.

16. Se A é 2 por 3 e C é 3 por 2, mostre, a partir de seu posto, que $CA \neq I$. Dê um exemplo em que $AC = I$. Para $m < n$, uma inversa à direita não equivale a uma inversa à esquerda.

17. Encontre os postos de AB e AM (matriz de posto 1 vezes matriz de posto 1):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1{,}5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & b \\ c & bc \end{bmatrix}.$$

18. *Se* A *possui posto* r, *então ela tem uma submatriz* r *por* r S *que é invertível*. Encontre essa submatriz S a partir das linhas pivôs e das colunas pivôs de cada A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

19. Se A possui r colunas pivôs, então AT possui r colunas pivôs. Dê um exemplo 3 por 3 no qual os números de colunas sejam diferentes para A e A^T.

20. A multiplicação de matrizes de posto 1, $A = uv^T$ e $B = wz^T$ resulta em uz^T vezes o número ____. AB possui posto um, a menos que ____ $= 0$.

21. (Importante) Suponha que A e B sejan $= I$. Prove, a partir do posto$(AB) \leq$ posto (A), que o posto de A é n. Assim, A é invertível e B deve ser sua inversa de ambos os lados. Portanto, $BA = I$ *(o que não é tão óbvio!)*.

22. Suponha que A e B tenham a *mesma* forma escalonada reduzida por linha R. Explique como transformar A em B por meio de operações de linha elementares. Assim, B é igual à matriz _______ vezes A.

23. Suponha que todas as r variáveis pivôs r venham *por último*. Descreva os quatro blocos da forma escalonada reduzida m por n (o bloco B deve ser r por r):

$$R = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Qual é a matriz de espaço nulo N de soluções especiais? Qual é seu formato?

24. Explique por que as linhas pivôs e as colunas pivôs de A (não R) sempre resultam em uma submatriz invertível A r por r.

25. (Problema simples) Descreva todas as matrizes 2 por 3 A_1 e A_2 com formas escalonadas de linhas R_1 e R_2, de modo que $R_1 + R_2$ seja a forma escalonada de linhas $A_1 + A_2$. É verdade que, nesse caso, $R_1 = A_1$ e $R_2 = A_2$?

26. Quais são as soluções especiais de $Rx = 0$ e $R^T y = 0$ para essas R?

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

27. Toda coluna de AB é uma combinação das colunas de A. Então, a dimensão dos espaços-colunas resultam em **posto(AB) $\leq$ posto(A)**. Problema: prove que **posto(AB) $\leq$ posto(B)**.

28. Toda matriz m por n de posto r pode ser reduzida a (m por r) vezes (r por n):

$$A = (\text{colunas pivôs de } A)(\text{primeiras } r \text{ linhas de } R) = \textbf{(COL)(LIN)}.$$

Apresente a matriz A 3 por 4 do início dessa seção como o produto da matriz 3 por 2 das colunas pivôs pela matriz 2 por 4 de R:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

29. (Recomendado) Execute as seis etapas seguindo a equação (6) para encontrar o espaço-coluna e o espaço nulo de A e a solução de $Ax = b$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

30. Qual é a matriz de espaço nulo N (de soluções especiais) para A, B, C?

$$A = [I \quad I] \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & \end{bmatrix} \quad \ldots \quad].$$

13 de abr de 2020 16:47

31. Suponha que A seja uma matriz m por n de posto r. Sua forma escalonada reduzida é R. Descreva exatamente a *forma escalonada reduzida por linha de* R^T (e não de A^T).

32. Para todo c, encontre R e as soluções especiais de $Ax = 0$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & c & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad A = \begin{bmatrix} 1-c & 2 \\ 0 & 2-c \end{bmatrix}.$$

Os Problemas 33 a 36 abordam a solução de $Ax = b$. Siga as etapas do texto para x_p e x_n. Reduza a matriz aumentada $[A \;\; b]$.

33. Quais vetores (b_1, b_2, b_3) estão no espaço-coluna de A? Quais combinações de linhas de A resultam em zero?

$$\text{(a)}\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

34. Quais condições de b_1, b_2, b_3, b_4 tornam cada sistema solúvel? *Resolva para* x:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

35. Em que condição de b_1, b_2, b_3 o seguinte sistema é solúvel? Inclua b como uma quarta coluna de $[A \ \ b]$. Encontre todas as soluções em que esta condição se mantém:

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= b_1 \\ 2x + 5y - 4z &= b_2 \\ 4x + 9y - 8z &= b_3. \end{aligned}$$

36. Encontre as soluções completas de:

$$\begin{aligned} x + 3y + 3z &= 1 \\ 2x + 6y + 9z &= 5 \\ -x - 3y + 3z &= 5 \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

37. Se você conhece x_p (variáveis livres = 0) e todas as soluções especiais de $Ax = b$, encontre x_p e todas as soluções especiais desses sistemas:

$$Ax = 2b \qquad \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ X \end{bmatrix} = b \qquad \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix}.$$

38. Se $Ax = b$ possui infinitas soluções, por que é impossível que $Ax = B$ (novo lado direito) tenha apenas uma solução? $Ax = B$ pode não ter soluções?

39. Por que um sistema 1 por 3 não pode ter $x_p = (2, 4, 0)$ e x_n = qualquer múltiplo de $(1, 1, 1)$?

40. (a) Se $Ax = b$ possui duas soluções x_1 e de $Ax = 0$.

(b) Em seguida, encontre outra solução para $Ax = b$.

41. Explique por que todas as afirmações abaixo são falsas:

(a) A solução completa é qualquer combinação linear de x_p e x_n.

(b) Um sistema $Ax = b$ possui no máximo uma solução particular.

(c) A solução x_p com todas as variáveis livres nulas é a menor solução (comprimento mínimo $\|x\|$). (Encontre um contraexemplo 2 por 2.)

(d) Se A é invertível, não há solução x_n no espaço nulo.

42. Dê exemplos de matrizes A para as quais o número de soluções de $Ax = b$ seja:

(a) 0 ou 1, dependendo de b.

(b) ∞, independentemente de b.

(c) 0 ou ∞, dependendo de b.

(d) 1, independentemente de b.

43. Apresente todas as relações conhecidas entre r, m e n se $Ax = b$:

(a) não possuir nenhuma solução para algum b.

(b) possuir infinitas soluções para todo b.

(c) possuir exatamente uma solução para algum b, nenhuma solução para outro b.

(d) exatamente uma solução para todo b.

44. Escolha o número q de modo que (se possível) os postos sejam (a) 1, (b) 2, (c) 3:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \\ 9 & 6 & q \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ q & 2 & q \end{bmatrix}.$$

45. Aplique a eliminação de Gauss-Jordan (lado direito se torna uma coluna adicional) a $Ux = 0$ e $Ux = c$. Obtenha $Rx = 0$ e $Rx = d$:

$$[U \quad 0] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 4 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [U \quad c] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \mathbf{5} \\ 0 & 0 & 4 & \mathbf{8} \end{bmatrix}.$$

Resolva $Rx = 0$ para encontrar xn (sua variável livre é $x_2 = 1$). Resolva $Rx = d$ para encontrar x_p (sua variável livre é $x_2 = 0$).

46. Suponha que a coluna 5 de U não possua pivô. Então, x_5 é uma variável _______. O vetor nulo (é) (não é) a única solução de $Ax = 0$. Se $Ax = b$ possui uma solução, então ele possui _______ soluções.

47. Encontre A e B com a propriedade dada ou explique por que não é possível.

(a) A única solução de $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ é $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) A única solução de $Bx = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

48. Existe uma matriz 3 por 3 sem elemento nulo para a qual $U = R = I$?

49. Reduza essas matrizes A e B a suas formas escalonadas usuais U:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & [illegible] & [illegible] \\ 0 & 8 & 8 \end{bmatrix}$

Encontre uma solução especial para cada variável livre e descreva todas as soluções de $Ax = 0$ e $Bx = 0$. Reduza as formas escalonadas U a R e desenhe uma caixa ao redor da matriz identidade nas linhas pivôs e colunas pivôs.

50. Aplique a eliminação com a coluna adicional para obter $Rx = 0$ e $Rx = d$:

$$\begin{bmatrix} U & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 2 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} U & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 & \mathbf{9} \\ 0 & 0 & 2 & \mathbf{4} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} \end{bmatrix}.$$

Resolva $Rx = 0$ (variável livre $= 1$). Quais são as soluções de $Rx = d$?

51. Suponha que a coluna 4 de uma matriz 3 por 5 tenha apenas números 0. Então, x_4 é certamente uma variável _______. A solução especial para essa variável é o vetor $x =$ _______.

52. Insira o máximo possível de números 1 em uma matriz escalonada U 4 por 7 e em uma forma *reduzida* R, cujas colunas pivôs sejam 2, 4, 5.

53. O espaço nulo de uma matriz A 3 por 4 é a reta que passa por $(2, 3, 1, 0)$.

(a) Qual é o *posto* de A e a solução completa de $Ax = 0$?

(b) Qual é exatamente a forma escalonada reduzida por linha R de A?

54. Verdadeiro ou falso? (Se for falso, dê um contraexemplo; se for verdadeiro, justifique.)

(a) Uma matriz quadrada não possui variáveis livres.

(b) Uma matriz invertível não possui variáveis livres.

(c) Uma matriz m por n não possui mais do que n variáveis pivôs.

(d) Uma matriz m por n não possui mais do que m variáveis pivôs.

55. A solução completa de $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ é $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Encontre A.

56. Reduza a $Ux = c$ (eliminação de Gauss) e, em seguida, a $Rx = d$:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = b.$$

Encontre uma solução particular x_p e todas as soluções de espaço nulo x_n.

57. Suponha que coluna 1 + coluna 3 + coluna 5 = 0, em uma matriz 4 por 5 com quatro pivôs. Qual coluna certamente não terá pivôs (e qual variável é livre)? Qual é a solução especial? Qual é o espaço nulo?

58. Suponha que a primeira e a última colunas de uma matriz 3 por 5 sejam a mesma (não nula). Então, _______ é uma variável livre. Encontre a solução especial para essa variável.

59. A equação $x - 3y - z = 0$ determina um plano em $\mathbf{R}^3$. Qual é a matriz A dessa equação? Quais são as variáveis livres? As soluções especiais são (3, 1, 0) e _______. O plano paralelo $x - 3y - z = 12$ contém o ponto particular (12, 0, 0). Todos os pontos nesse plano têm a seguinte forma (preencha os primeiros componentes):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \; \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} \; \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \; \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Os problemas a seguir pedem matrizes (se possíveis) com propriedades específicas.

60. Construa uma matriz 2 por 2 cujo espaço nulo seja igual ao seu espaço-coluna.

61. Explique por que A e $-A$ sempre possuem a mesma forma escalonada reduzida R.

62. A forma reduzida R de uma matriz 3 por 3 com elementos escolhidos aleatoriamente quase certamente será _______. Que R será virtualmente provável se a matriz aleatória A for 4 por 3?

63. Se as soluções especiais de $Rx = 0$ estão nas colunas dessas matrizes N, retroceda para encontrar as linhas não nulas das matrizes reduzidas R:

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad N = \begin{bmatrix} \; \\ \; \\ \; \end{bmatrix} \quad \text{(vazio 3 por 1).}$$

64. Demonstre, por meio de exemplo, que essas três afirmações são, em geral, *falsas*:

(a) A e A^T possuem o mesmo espaço nulo.

(b) A e A^T possuem as mesmas variáveis livres.

(c) Se R for a forma reduzida $\mathrm{rref}(A)$, então R^T é $\mathrm{rref}(A^T)$.

65. Construa uma matriz cujo espaço nulo consista de todas as combinações de (2, 2, 1, 0) e (3, 1, 0, 1).

66. Construa uma matriz cujo espaço-coluna contenha (1, 1, 1) e cujo espaço nulo seja a reta dos múltiplos de (1, 1, 1, 1).

67. Construa uma matriz cujo espaço nulo consista de todos os múltiplos de (4, 3, 2, 1).

68. Por que nenhuma matriz 3 por 3 possui um espaço nulo que seja igual ao seu espaço-coluna?

69. Construa uma matriz cujo espaço-coluna contenha (1, 1, 0) e (0, 1, 1) e cujo espaço nulo contenha (1, 0, 1) e (0, 0, 1).

70. Construa uma matriz cujo espaço-coluna contenha (1, 1, 5) e (0, 3, 1) e cujo espaço nulo contenha (1, 1, 2).