Conjunto de problemas 1.5

1. Multiplique a matriz $L = E^{-1}F^{-1}G^{-1}$ da equação (6) por GFE da equação (3):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{vezes} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Multiplique também na ordem contrária. *Por que as respostas são como são?*

2. Quando uma matriz triangular superior é não singular (possui um conjunto completo de pivôs)?

3. Que múltiplos de ℓ_{32} da linha 2 de A será subtraído pela eliminação da linha 3 de A? Utilize a forma fatorada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Quais serão os pivôs? Será necessária uma troca de linhas?

4. Encontre os produtos FGH e HGF quando as matrizes (com zeros da triangular superior omitidos) forem:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. (a) Sob que condições o seguinte produto é não singular?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Resolva o sistema $Ax = b$, começando com $Lc = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b.$$

6. (***Segunda prova de $A = LU$***) A terceira linha de U surge da terceira linha de A subtraindo-se os múltiplos das linhas 1 e 2 (de U!):

$$\text{linha 3 de } U = \text{linha 3 de } A - l_{31}(\text{linha 1 de } U) - l_{32}(\text{linha 2 de } U).$$

(a) Por que se subtraem as linhas de U e não as linhas de A? Resposta: porque, no momento em que uma linha de pivô é utilizada, ____.

(b) A equação acima é a mesma que:

$$\text{linha 3 de } A = \ell_{31}(\text{linha 1 de } U) + \ell_{32}(\text{linha 2 de } U) + 1(\text{linha 3 de } U).$$

Que regra da multiplicação de matrizes produz essa linha 3 de L vezes U?

As outras linhas de LU harmonizam-se da mesma maneira que as linhas de A.

7. Fatore A em LU e escreva o sistema triangular superior $Ux = c$ que aparece após a eliminação para:

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

8. (a) Por que são necessárias aproximadamente $n^2/2$ etapas de multiplicação-subtração para resolver cada igualdade $Lc = b$ e $Ux = c$?

(b) Quantas etapas a eliminação utiliza para resolver dez sistemas com a mesma matriz de coeficientes A, 60 por 60?

9. Aplique a eliminação para produzir os fatores L e U de:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

10. Encontre E^2, E^8 e E^{-1} se:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. Determine se os seguintes sistemas são singulares ou não singulares e, se eles não têm solução, têm uma solução ou infinitas soluções:

$$\begin{aligned} v - w &= 2 \\ u - v \quad &= 2 \\ u \quad - w &= 2 \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} v - w &= 0 \\ u - v \quad &= 0 \\ u \quad - w &= 0 \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} v + w &= 1 \\ u + v \quad &= 1 \\ u \quad + w &= 1. \end{aligned}$$

12. Apresente todas as seis matrizes de permutação 3 por 3, incluindo $P = I$. Identifique suas inversas, que também são matrizes de permutação. As inversas satisfazem a propriedade $PP^{-1} = I$ e estão na mesma lista.

13. Encontre uma matriz de permutação 4 por 4 que exija trocas de linha para chegar ao final da eliminação (que é $U = I$).

14. A forma menos familiar $A = LPU$ troca linhas apenas no final:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow L^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} = PU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Qual é a matriz L neste caso? Comparando com $PA = LU$, no box 1J, os multiplicadores agora ficam no lugar (ℓ_{21} é 1 e ℓ_{31} é 2, se $A = LPU$).

15. Como você pode fatorar A no produto UL de triangular superior vezes triangular inferior? Eles seriam os mesmos fatores de $A = LU$?

16. Que valores de a, b, c levam às trocas de linha? Quais tornam a matriz singular?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 8 & 3 \\ 0 & b & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} c & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

17. Resolva por eliminação trocando linhas quando necessário:

$$\begin{aligned} u + 4v + 2w &= -2 \\ -2u - 8v + 3w &= 32 \\ v + w &= 1 \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} v + w &= 0 \\ u + v \quad &= 0 \\ u + v + w &= 1 \end{aligned}$$

Que matrizes de permutação são necessárias?

18. Resolva como dois sistemas triangulares, sem multiplicar LU para encontrar A:

$$LUx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

19. Encontre as fatorações $PA = LDU$ (e verifique-as) para:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Os problemas 20 a 31 calculam a fatoração $A = LU$ (e também $A = LDU$).

20. Quais são os sistemas triangulares 3 por 3 $Lc = b$ e $Ux = c$ do problema 24? Perceba que $c = (5, 2, 2)$ resolve a primeira equação. Que x resolve a segunda?

21. Quais são as três matrizes de eliminação E_{21}, E_{31}, E_{32} que transformam A na forma triangular superior $E_{32}E_{31}E_{21}A = U$? Multiplique por E_{32}^{-1}, E_{31}^{-1} e E_{21}^{-1} para fatorar A em LU com $L = E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1}$. Encontre L e U:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

22. Quando zero aparece em posição de pivô, $A = LU$ *não é possível!* (Precisamos de pivôs d, f, i não nulos em U.) Mostre diretamente por que ambas as igualdades abaixo são impossíveis:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \ell & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \ell & 1 & \\ m & n & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & e & g \\ & f & h \\ & & i \end{bmatrix}.$$

23. A triangularização altera $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x = b$ para uma triangular $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x = c$:

$$\begin{matrix} x + y = 5 \\ x + 2y = 7 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x + y = 5 \\ y = 2 \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{5} \\ 1 & 2 & \mathbf{7} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{5} \\ 0 & 1 & \mathbf{2} \end{bmatrix}.$$

Essa etapa subtraiu $\ell_{21} =$ _______ vezes a linha 1 da linha 2. A etapa reversa *soma* ℓ_{21} vezes a linha 1 à linha 2. A matriz para essa etapa reversa é $L =$ _______. Multiplique essa matriz L por um sistema triangular $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = x = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ para obter _______ = _______. Em notação por letras, L multiplica $Ux = c$ para obter _______.

24. (Alterar para 3 por 3) A triangularização altera $Ax = b$ para uma triangular $Ux = c$:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ x + 2y + 3z &= 7 \\ x + 3y + 6z &= 11 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ y + 2z &= 2 \\ 2y + 5z &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ y + 2z &= 2 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

A equação $z = 2$ em $Ux = c$ surge a partir da original $x + 3y + 6z = 11$ em $Ax = b$, subtraindo-se $\ell_{31} =$ ____ vezes a equação 1 e $\ell_{32} =$ ____ vezes a equação *final* 2. Faça a reversão que recupere $[1 \;\; 3 \;\; 6 \;\; 11]$ em $[A \;\; b]$ a partir das finais $[1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 5]$, $[0 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 2]$ e $[0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 2]$ em $[U \;\; c]$:

$$\text{Linha 3 de } [A \;\; b] = (\ell_{31} \text{ Linha } 1 + \ell_{32} \text{ Linha } 2 + 1 \text{ Linha } 3) \text{ de } [U \;\; c].$$

Em notação matricial, trata-se de uma multiplicação por L. Assim, $A = LU$ e $b = Lc$.

25. Quais são as duas matrizes de eliminação E_{21} e E_{32} que transformam A na forma triangular superior $E_{32}E_{21}A = U$? Multiplique por E_{32}^{-1} e E_{21}^{-1} para fatorar A em $LU = E_{21}^{-1}E_{32}^{-1}U$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

26. Que número c leva a um zero na segunda posição de pivô? Uma troca de linha é necessária e $A = LU$ não é possível. Que c gera zero na posição do terceiro pivô? Assim, uma troca de linha não poderá ajudar e a eliminação falhará:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

27. (Recomendado) Calcule L e U para a matriz simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

Encontre quatro condições em a, b, c, d para obter $A = LU$ com quatro pivôs.

28. *Matrizes tridiagonais* possuem apenas elementos nulos, exceto na diagonal principal e nas duas diagonais adjacentes. Fatore as matrizes abaixo em $A = LU$ e $A = LDV$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ a & a+b & b \\ 0 & b & b+c \end{bmatrix}.$$

29. Resolva $Lc = b$ para encontrar c. Em seguida, resolva $Ux = c$ para encontrar x. Qual é a matriz A?

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

30. A e B são simétricas ao longo da diagonal (pois $4 = 4$). Encontre suas fatorações triplas LDU e diga como U está relacionado com L para essas matrizes simétricas:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

31. Resolva o sistema triangular $Lc = b$ para encontrar c. Em seguida, resolva $Ux = c$ para encontrar x:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Por garantia, encontre $A = LU$ e resolva $Ax = b$. Circule c quando você o vir.

32. Quais são as matrizes L e D para a matriz A abaixo? Qual é a U em $A = LU$ e qual é a nova U em $A = LDU$?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

33. Encontre L e U para a matriz não simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} a & r & r & r \\ a & b & s & s \\ a & b & c & t \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

Encontre as quatro condições de a, b, c, d, r, s, t para obter $A = LU$ com quatro pivôs.

34. (Revisão) Quais valores de c tornam $A = LU$ impossível – com três pivôs?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & c & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

35. Estime a diferença de tempo para cada nova dimensão do lado direito b se $n = 800$. Crie $A =$ rand(800), $b =$ rand(800,1) e $B =$ rand(800,9). Compare os tempos de tic; A\b; toc e tic; A\B; toc (que resolva os 9 lados direitos).

36. Utilize chol(pascal(5)) para encontrar os fatores triangulares de pascal(5) do MATLAB. As trocas de linha em [L, U] = lu(pascal(5)) corrompe o padrão de Pascal!

37. Se A e B têm elementos não nulos nas posições marcadas por x, que zeros continuam sendo nulos em seus fatores L e U?

$$A = \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & 0 \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} x & x & x & 0 \\ x & x & 0 & x \\ x & 0 & x & x \\ 0 & x & x & x \end{bmatrix}.$$

38. Começando a partir de uma matriz A 3 por 3 com pivôs 2, 7, 6, some uma quarta linha e coluna para gerar M. Quais são os primeiros três pivôs de M e por quê? Que quarta linha e coluna garantem a produção de 9 como quarto pivô?

39. (Importante) Se A possui pivôs 2, 7, 6 sem trocas de linhas, quais são os pivôs para a submatriz 2 por 2 superior esquerda de B (sem a linha 3 e a coluna 3)? Justifique.

Os problemas 40 a 48 abordam matrizes de permutação.

40. (Tente resolver esta questão) Que permutação torna PA triangular superior? Que permutação torna P_1AP_2 triangular inferior? ***A multiplicação à direita de* A *por* $\mathbf{P}_2$ *troca as* ________ *de* A.**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

41. Se P_1 e P_2 são matrizes de permutação, P_1P_2 também será. Ela também terá as linhas de I em alguma ordem. Dê exemplos com $P_1P_2 \neq P_2P_1$ e $P_3P_4 = P_4P_3$.

42. Encontre uma matriz de permutação 3 por 3 com $P^3 = I$ (mas não $P = I$). Encontre uma permutação $\hat{P}$ 4 por 4 com $\hat{P}^4 \neq I$.

43. Há 12 permutações "*pares*" de (1, 2, 3, 4), com um *número par de trocas*. Duas delas são (1, 2, 3, 4) sem trocas, e (4, 3, 2, 1) com duas trocas. Relacione as outras dez. Em vez de escrever cada matriz 4 por 4, utilize os números 4, 3, 2, 1 para dar a posição do 1 em cada linha.

44. Quantas trocas permutarão (5, 4, 3, 2, 1) de volta para (1, 2, 3, 4, 5)? Quantas trocas alterarão (6, 5, 4, 3, 2, 1) para (1, 2, 3, 4, 5, 6)? Uma é par e outra é ímpar. Para $(n, ..., 1)$ a $(1, ..., n)$, mostre que $n = 100$ e 101 são pares, e $n = 102$ e 103 são ímpares.

45. A matriz P que multiplica (x, y, z) para obter (z, x, y) também é uma matriz de rotação. Encontre P e P^3. O eixo de rotação $a = (1, 1, 1)$ não se move; é igual a Pa. Qual é o ângulo de rotação de $v = (2, 3, -5)$ para $Pv = (-5, 2, 3)$?

46. Se P é qualquer matriz de permutação, encontre o vetor x não nulo de modo que $(I - P)x = 0$ (isso significa que $I - P$ não possui inversa e apresenta determinante zero).

47. Se P possui apenas números 1 em sua antidiagonal de $(1, n)$ a $(n, 1)$, descreva PAP.

48. Se você extrair potências de uma permutação, por que algumas matrizes P^k são eventualmente iguais a I? Encontre uma matriz de permutação P 5 por 5, cuja menor potência que a iguale a I seja P^6 (esta é uma questão de desafio. Combine um bloco 2 por 2 com um bloco 3 por 3).