Conjunto de problemas 1.3

Os problemas 1 a 9 abordam eliminação em sistemas 2 por 2.

1. Escolha um lado direito de modo que o sistema não tenha solução e outro para que tenha infinitas soluções. Quais são duas dessas soluções?

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 10 \\ 6x + 4y &= \_\_. \end{aligned}$$

2. Que múltiplo da equação 1 deve ser *subtraído* da equação 2?

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= 6 \\ -x + 5y &= 0. \end{aligned}$$

Após essa etapa de eliminação, resolva o sistema triangular. Se o lado direito mudar para $(-6, 0)$, qual será a nova solução?

3. Escolha o coeficiente b que torna esse sistema singular. A seguir, escolha um lado direito g que o torne solúvel. Encontre duas soluções no caso singular.

$$\begin{aligned} 2x + by &= 16 \\ 4x + 8y &= g. \end{aligned}$$

4. Que múltiplo ℓ da equação 1 deve ser subtraído da equação 2?

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 10x + 9y &= 11. \end{aligned}$$

Após essa etapa da eliminação, escreva o sistema triangular superior e circule os dois pivôs. Os números 1 e 11 não influenciam esses pivôs.

5. Resolva o sistema triangular do problema 4 por retrossubstituição, y antes de x. Verifique que x vezes $(2, 10)$ mais y vezes $(3, 9)$ é igual a $(1, 11)$. Se o lado direito mudar para $(4, 44)$, qual será a nova solução?

6. Que múltiplo de ℓ da equação 1 deve ser subtraído da equação 2?

$$\begin{aligned} ax + by &= f \\ cx + dy &= g. \end{aligned}$$

O primeiro pivô é a (pressuposto como não nulo). A eliminação produz que fórmula para o segundo pivô? Quanto é y? O segundo pivô não existe se $ad = bc$.

7. Que teste sobre b_1 e b_2 decide se essas duas equações admitem uma solução? Quantas soluções elas terão? Esboce a interpretação por colunas.

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= b_1 \\ 6x - 4y &= b_2. \end{aligned}$$

8. Para quais números de a a eliminação falha (a) permanentemente e (b) temporariamente?

$$\begin{aligned} ax + 3y &= -3 \\ 4x + 6y &= \ \ 6. \end{aligned}$$

Resolva para x e y após solucionar a segunda falha por troca de linhas.

9. Para quais três números k a eliminação falha? Qual deles pode ser reparado por uma troca de linhas? Em cada caso, o número de soluções é 0, 1 ou ∞?

$$\begin{aligned} kx + 3y &= 6 \\ 3x + ky &= -6. \end{aligned}$$

Os problemas 10 a 19 abordam a eliminação em sistemas 3 por 3 (e possíveis falhas).

10. Qual valor de b leva posteriormente a uma troca de linhas? Qual valor b leva à inexistência de um pivô? Nesse caso singular, encontre a solução não nula x, y, z.

$$\begin{aligned} x + by &= 0 \\ x - 2y - z &= 0 \\ + z &= 0. \end{aligned}$$

11. Qual valor de d obriga a uma troca de linha e qual é o sistema triangular (não singular) para esse *valor*? Qual valor de d torna esse sistema singular (sem terceiro pivô)?

$$\begin{aligned} 2x + 5y + z &= 0 \\ 4x + dy + z &= 2 \\ y - z &= 3. \end{aligned}$$

12. Reduza esse sistema à forma triangular superior com duas operações de linha:

$$\begin{aligned} 2x + 5y + z &= 8 \\ 4x + 7y + 5z &= 20 \\ -2y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

Circule os pivôs. Resolva por meio de retrossubstituição para z, y, x.

13. Aplique eliminação (circule os pivôs) e retrossubstituição para resolver

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 3 \\ 4x - 5y + z &= 7 \\ 2x - y - 3z &= 5. \end{aligned}$$

Relacione as três operações de linhas: Subtrair ____ vezes a linha ____ da linha ____.

14. Qual valor de q torna esse sistema singular, e qual t do lado direito lhe dá infinitas soluções? Encontre a solução que possui $z = 1$.

$$\begin{aligned} x + 4y - 2z &= 1 \\ x + 7y - 6z &= 6 \\ 3y + qz &= t. \end{aligned}$$

15. (Recomendado) É possível que um sistema de equações lineares tenha exatamente duas soluções. *Explique por quê.*

(a) Se (x, y, z) e (X, Y, Z) são duas soluções, qual é a outra?

(b) Se 25 planos se cruzam em dois pontos, onde mais eles se cruzam?

16. Se as linhas 1 e 2 são as mesmas, até onde você consegue prosseguir com a eliminação (permitindo-se trocas de linha)? Se as colunas 1 e 2 são iguais, qual pivô está faltando?

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \qquad & 2x + 2y + z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \qquad & 4x + 4y + z &= 0 \\ 4x + y + z &= 2 \qquad & 6x + 6y + z &= 2. \end{aligned}$$

17. (a) Construa um sistema 3 por 3 que precise de duas trocas de linhas para chegar à forma triangular e a uma solução.

(b) Construa um sistema 3 por 3 que precise de uma troca de linha para que a eliminação prossiga, mas falhe adiante.

18. Três planos podem não ter um ponto de interseção quando nenhum de dois planos são paralelo. O sistema é singular se a linha 3 de A for uma _______ das duas primeiras linhas. Encontre uma terceira equação que não possa ser resolvida se $x + y + z = 0$ e $x - 2y - z = 1$.

19. Construa um exemplo 3 por 3 que possua 9 coeficientes diferentes no lado esquerdo, mas cujas linhas 2 e 3 se tornem nulas na eliminação. Quantas soluções terá seu sistema com $b = (1, 10, 100)$ e quantas com $b = (0, 0, 0)$?

Os problemas 20 a 22 abordam sistemas 4 por 4 e *n* por *n*.

20. Se você estender o problema 22 seguindo o padrão 1, 2, 1 ou –1, 2, –1, qual será o quinto pivô? Qual será o n-ésimo pivô?

21. Aplique eliminação e retrossubstituição para resolver:

$$\begin{aligned} 2u + 3v \phantom{{}+w} &= 0 \\ 4u + 5v + w &= 3 \\ 2u - v - 3w &= 5. \end{aligned}$$

Quais são os pivôs? Relacione as três operações nas quais um múltiplo de uma linha é subtraído de outra.

22. Encontre os pivôs e a solução destas quatro equações:

$$\begin{aligned} 2x + y \phantom{{}+2z+t} &= 0 \\ x + 2y + z \phantom{{}+t} &= 0 \\ y + 2z + t &= 0 \\ z + 2t &= 5. \end{aligned}$$

23. Resolva por eliminação o sistema de duas equações:

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 3x + 6y &= 18. \end{aligned}$$

Esboce um gráfico representando cada equação como uma linha reta no plano xy; as linhas se intersectam na solução. Além disso, adicione mais uma reta – o gráfico da nova segunda equação que surge após a eliminação.

24. Encontre três valores de a para os quais a eliminação falhe temporária ou permanentemente, em:

$$\begin{aligned} au + v &= 1 \\ 4u + av &= 2. \end{aligned}$$

A falha no primeiro estágio pode ser corrigida trocando-se as linhas, mas isso não pode ser feito no segundo estágio.

25. Resolva o sistema e encontre os pivôs em:

$$\begin{aligned} 2u - v \qquad\qquad &= 0 \\ -u + 2v - w \qquad &= 0 \\ - v + 2w - z &= 0 \\ - w + 2z &= 5. \end{aligned}$$

Você pode utilizar o lado direito como uma quinta coluna (e omitir as letras u, v, w, z até a solução no final).

26. Verdadeiro ou falso:

(a) Se a terceira equação começa com um coeficiente nulo (com $0u$), então nenhum múltiplo da equação 1 será subtraído da equação 3.

(b) Se a terceira equação possui zero como seu segundo coeficiente (ela contém $0v$), então nenhum múltiplo da equação 2 será subtraído da equação 3.

(c) Se a terceira equação contém $0u$ e $0v$, então nenhum múltiplo da equação 1 ou da equação 2 será subtraído da equação 3.

27. Para

$$\begin{aligned} u + v + w &= 2 \\ u + 3v + 3w &= 0 \\ u + 3v + 5w &= 2. \end{aligned}$$

qual é o sistema triangular que resulta da eliminação por triangularização, e qual é a solução?

28. Aplique eliminação ao sistema

$$\begin{aligned} u + v + w &= -2 \\ 3u + 3v - w &= 6 \\ u - v + w &= -1. \end{aligned}$$

Quando surgir um zero em posição de pivô, troque essa equação pela debaixo e prossiga. Que coeficiente de v na terceira equação, em lugar do atual -1, tornaria impossível prosseguir – e causaria uma falha na eliminação?

29. Encontre, de modo experimental, o tamanho médio (valor absoluto) do primeiro, segundo e terceiro pivôs para a função lu(rand(3, 3)) do MATLAB. A média do primeiro pivô de abs(A(1, 1)) deve ser 0,5.

30. Para quais três valores de a a eliminação falhará em obter três pivôs?

$$\begin{aligned} ax + 2y + 3z &= b_1 \\ ax + ay + 4z &= b_2 \\ ax + ay + az &= b_3. \end{aligned}$$

31. (Opcional) Normalmente, a multiplicação de dois números complexos

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

envolve as quatro multiplicações distintas ac, bd, bc e ad. Ignorando i, você é capaz de calcular $ac - bd$ e $bc + ad$ com apenas três multiplicações? (Você pode fazer somas para formar $a + b$ antes da multiplicação sem nenhum problema.)

32. Utilize eliminação para resolver:

$$\begin{aligned} u + v + w &= 6 \\ u + 2v + 2w &= 11 \\ 2u + 3v - 4w &= 3 \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} u + v + w &= 7 \\ u + 2v + 2w &= 10 \\ 2u + 3v - 4w &= 3. \end{aligned}$$