1. Resolva as equações abaixo para encontrar a combinação de colunas que seja igual a b:

$$\textbf{Sistema triangular} \qquad \begin{aligned} u - v - w &= b_1 \\ v + w &= b_2 \\ w &= b_3. \end{aligned}$$

2. Esboce as três retas abaixo. As equações podem ser resolvidas?

$$\textbf{Sistema 3 por 2} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ x - y &= 2 \\ y &= 1. \end{aligned}$$

O que acontece se todos os elementos do lado direito forem zero? Há alguma opção diferente de zero para o lado direito que permita que as três linhas se interceptem no mesmo ponto?

3. Para as equações $x + y = 4$, $2x - 2y = 4$, a interpretação por (duas retas que se interceptam) e o método de colunas (combinação de duas colunas igual ao vetor-coluna (4, 4) do lado direito).

4. Encontre dois pontos sobre a linha de interseção dos três planos $t = 0$, $z = 0$ e $x + y + z + t = 1$ em um espaço quadridimensional.

5. (Recomendado) Descreva a interseção dos três planos $u + v + w + z = 6$ e $u + w + z = 4$ e $u + w = 2$ (todos em espaço quadridimensional). É uma reta, um ponto ou um conjunto vazio? Como será a interseção se um quarto plano $u = -1$ for adicionado? Encontre uma quarta equação que deixe o sistema sem solução.

6. Essas equações certamente têm a solução $x = y = 0$. Para quais valores de a há uma reta inteira de soluções?

$$\begin{aligned} ax + 2y &= 0 \\ 2x + ay &= 0 \end{aligned}$$

7. Explique por que o sistema:

$$\begin{aligned} u + v + w &= 2 \\ u + 2v + 3w &= 1 \\ v + 2w &= 0 \end{aligned}$$

é singular, encontrando uma combinação das três equações que some $0 = 1$. Que valor deve substituir o último zero do lado direito para permitir que a equação tenha infinitas soluções – e qual é uma das soluções?

8. (Recomendado) Em que condições de y_1, y_2, y_3, os pontos $(0, y_1)$, $(1, y_2)$, $(2, y_3)$ se localizam em uma linha reta?

9. Se $b = (2, 5, 7)$, encontre uma solução (u, v, w) para a equação (4) diferente da solução (1, 0, 1) mencionada no texto.

10. Encontre mais duas opções de valores do lado direito, além de $b = (2, 5, 7)$ para os quais a equação (4) tenha solução. Encontre mais duas opções de valores do lado direito, além de $b = (2, 5, 6)$ para os quais a equação (4) não tenha solução.

11. A interpretação por colunas do problema 7 (sistema singular) é:

$$u\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = b.$$

Mostre que as três colunas do lado esquerdo se localizam no mesmo plano, expressando a terceira coluna como uma combinação das duas primeiras. Quais serão todas as soluções (u, v, w), se b for o vetor zero (0, 0, 0)?

12. Começando com $x + 4y = 7$, encontre a equação da reta paralela que passa por $x = 0, y = 0$. Encontre a equação de outra reta que cruze a primeira em $x = 3, y = 1$.

Os problemas 13 a 15 são uma revisão das interpretações de linhas e colunas.

13. Para duas equações lineares de três incógnitas x, y, z, a interpretação por linhas mostrará (2 ou 3) (linhas ou planos) em um espaço (bi ou tri) dimensional. A interpretação por colunas está em um espaço (bi ou tri) dimensional. As soluções normalmente localizam-se em um(a) _____.

14. Para quatro equações lineares de duas incógnitas x e y, a interpretação por linhas mostra quatro _____. A interpretação por colunas está em um espaço de _____ dimensões. As equações não têm solução, a menos que o vetor do lado direito seja uma combinação de _____.

15. Desenhe as duas figuras em dois planos para as equações $x - 2y = 0$, $x + y = 6$.

16. Encontre o ponto com $z = 2$ na reta de interseção dos planos $x + y + 3z = 6$ e $x - y + z = 4$. Encontre o ponto com $z = 0$ e um terceiro ponto na metade da distância entre eles.

17. No problema 22, as colunas são $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 3)$ e $(1, 1, 2)$. Trata-se de um "caso singular", pois a terceira coluna é _____. Encontre as duas combinações de colunas que resultam em $b = (2, 3, 5)$. Isso só é possível para $b = (4, 6, c)$ se $c =$ _____.

18. Nessas equações, a terceira coluna (que multiplica w) é a *mesma* que a b do lado direito. A forma de colunas das equações fornece *imediatamente* a solução para (u, v, w)?

$$\begin{aligned} 6u + 7v + 8w &= 8 \\ 4u + 5v + 9w &= 9 \\ 2u + 2v + 7w &= 7. \end{aligned}$$

19. Mova o terceiro plano do problema 22 para um plano paralelo $2x + 3y + 2z = 9$. Assim, as três equações não têm solução – *por que não*? Os dois primeiros planos se encontram ao longo da reta **L**, mas o terceiro plano não _____ essa reta.

20. Quando a equação 1 é somada à equação 2, quais dos seguintes itens são alterados: os planos da interpretação por linhas, da interpretação por colunas, os coeficientes das matrizes ou a solução?

21. Se (a, b) é um múltiplo de (c, d) com $abcd \neq 0$, *mostre que* (a, c) *é um múltiplo de* (b, d). Isso é surpreendentemente importante, considere esta questão um desafio. Você pode, primeiro, utilizar os números para ver como a, b, c e d estão relacionados. A questão levará a:

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ possui linhas dependentes, então ela terá colunas dependentes.}$$

22. A primeira dessas equações mais a segunda é igual à terceira:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x + 2y + z &= 3 \\ 2x + 3y + 2z &= 5. \end{aligned}$$

Os dois primeiros planos se cruzam ao longo de uma reta. O terceiro plano contém essa reta, pois, se x, y, z satisfazem as duas primeiras equações, então eles também _____. As equações possuem infinitas soluções (a linha inteira **L**). Encontre três soluções.

23. Normalmente, quatro "planos" em um espaço quadridimensional se encontram em um(a) _____. Normalmente, quatro vetores-coluna em um espaço quadridimensional podem ser combinados para produzir b. Que combinação de $(1, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$ produz $b = (3, 3, 3, 2)$? Quais são as quatro equações de x, y, z, t que você está resolvendo?