

**GABARITO 10ª Lista de Exercícios Física I Rolagem Torque e Momento Angular
(10 Edição Halliday)**

2 Os pneus de um automóvel que se move a 80 km/h têm 75,0 cm de diâmetro. (a) Qual é a velocidade angular dos pneus em relação aos respectivos eixos? (b) Se o carro é freado com aceleração constante e as rodas descrevem 30 voltas completas (sem deslizamento), qual é o módulo da aceleração angular das rodas? (c) Que distância o carro percorre durante a frenagem?

2. A velocidade inicial do carro é

$$v = (80 \text{ km/h})(1000 \text{ m/km})(1 \text{ h}/3600 \text{ s}) = 22,2 \text{ m/s}.$$

O raio dos pneus é $R = 0,750/2 = 0,375 \text{ m}$.

(a) Como a velocidade inicial do carro é igual à velocidade inicial do centro de massa dos pneus, a Eq. 11-2 nos dá

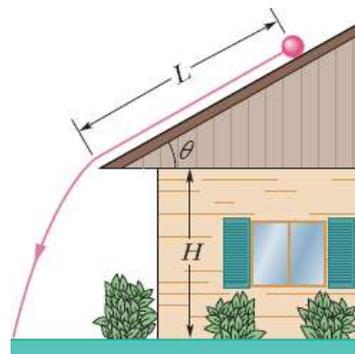
$$\omega_0 = \frac{v_{\text{CM0}}}{R} = \frac{22,2 \text{ m/s}}{0,375 \text{ m}} = 59,3 \text{ rad/s}.$$

(b) Para $\theta = (30,0)(2\pi) = 188 \text{ rad}$ e $\omega = 0$, a Eq. 10-14 nos dá

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta \Rightarrow |\alpha| = \frac{(59,3 \text{ rad/s})^2}{2(188 \text{ rad})} = 9,31 \text{ rad/s}^2.$$

(c) De acordo com a Eq. 11-1, a distância percorrida pelo carro é $R\theta = 70,7 \text{ m}$.

7 Na figura, um cilindro maciço com 10 cm de raio e massa de 12 kg parte do repouso e rola para baixo uma distância $L = 6,0$ m, sem deslizar, em um telhado com uma inclinação $\theta = 30^\circ$. (a) Qual é a velocidade angular do cilindro em relação ao eixo central ao deixar o telhado? (b) A borda do telhado está a uma altura $H = 5,0$ m. A que distância horizontal da borda do telhado o cilindro atinge o chão?



7. (a) Podemos calcular a velocidade angular do cilindro ao deixar o telhado usando a lei de conservação da energia. A energia cinética inicial é $K_i = 0$ e a energia potencial inicial é $U_i = Mgh$, em que $h = 6,0 \text{ sen } 30^\circ = 3,0$ m (estamos usando a borda do telhado como nível de referência para calcular a energia potencial). De acordo com a Eq. 11-5, a energia cinética final (na borda do telhado) é

$$K_f = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2,$$

na qual v é a velocidade do centro de massa e ω é a velocidade angular. Como, até esse momento, o cilindro rolou sem deslizar, sabemos que $v = R\omega$, sendo $R = 0,10$ m. Como $I = \frac{1}{2}MR^2$ [Tabela 10-2(c)], temos, de acordo com a lei de conservação da energia,

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}MR^2\omega^2 + \frac{1}{4}MR^2\omega^2 = \frac{3}{4}MR^2\omega^2.$$

Dividindo a equação pela massa M , obtemos

$$\omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{4}{3}gh} = \frac{1}{0,10 \text{ m}} \sqrt{\frac{4}{3}(9,8 \text{ m/s}^2)(3,0 \text{ m})} = 63 \text{ rad/s}.$$

(b) Depois que o cilindro atinge a borda do telhado, temos um problema de movimento balístico do tipo que foi discutido no Capítulo 4. Colocamos a origem na posição do centro de massa no instante em que o cilindro deixa o telhado (a posição “inicial” para esta parte do problema) e tomamos como positivos o sentido para esquerda do eixo x e o sentido para baixo do eixo y . De acordo com o resultado do item (a), $v_0 = R\omega = 6,3$ m/s, cujas componentes são (com essa escolha de eixos)

$$v_{0x} = v_0 \cos 30^\circ = 5,4 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin 30^\circ = 3,1 \text{ m/s}.$$

Assim, o movimento balístico se torna

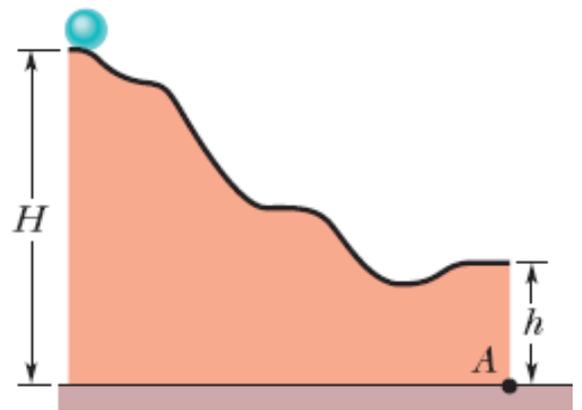
$$x = v_{0x}t \quad \text{e} \quad y = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2.$$

Para começar, usamos a segunda equação para determinar o instante em que $y = H = 5,0$ m. Escolhendo a raiz positiva da solução da equação do segundo grau, temos:

$$t = \frac{-v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2gH}}{g} = 0,74 \text{ s}.$$

Substituindo esse valor na primeira equação, obtemos $x = (5,4 \text{ m/s})(0,74 \text{ s}) = 4,0$ m.

9 Na figura, uma bola maciça rola suavemente a partir do repouso (começando na altura $H = 6,0$ m) até deixar a parte horizontal no fim da pista, a uma altura $h = 2,0$ m. A que distância horizontal do ponto A a bola toca o chão?



9. Para calcular a posição do ponto em que a bola toca o chão, determinamos primeiro, usando a lei de conservação da energia, a velocidade com a qual a bola deixa a pista. A energia cinética inicial é $K_i = 0$ e a energia potencial inicial é $U_i = MgH$. A energia cinética final da bola (ao deixar a pista) é $K_f = Mv^2/2 + I\omega^2/2$ (Eq. 11-5), em que v é a velocidade do centro de massa e ω é a velocidade angular, e a energia potencial final é Mgh . Como, até esse momento, a bola rola sem deslizar, sabemos que $\omega = v/R$. Como o momento de inércia é dado por $I = 2MR^2/5$ [Tabela 10-2(f)], a lei de conservação da energia nos dá

$$\begin{aligned} MgH &= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{2}{10}Mv^2 + Mgh \\ &= \frac{7}{10}Mv^2 + Mgh. \end{aligned}$$

Dividindo a equação por M , obtemos

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}g(H-h)} = \sqrt{\frac{10}{7}(9,8 \text{ m/s}^2)(6,0 \text{ m} - 2,0 \text{ m})} = 7,48 \text{ m/s}.$$

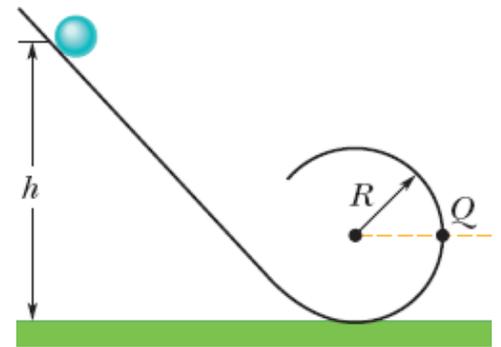
A partir do momento em que a bola deixa a pista, temos um movimento balístico do tipo que foi discutido no Capítulo 4. Colocamos a origem na posição do centro de massa no instante em que a bola deixa a pista (a posição “inicial” para esta parte do problema) e tomamos como positivos o sentido para direita do eixo x e o sentido para baixo do eixo y . Nesse caso, como a velocidade inicial é horizontal, as equações do movimento balístico se tornam

$$x = vt \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{2}gt^2.$$

Fazendo $y = h$ da segunda equação, obtemos $t = \sqrt{2h/g}$. Substituindo t pelo seu valor na primeira equação, temos:

$$x = v\sqrt{\frac{2h}{g}} = (7,48 \text{ m/s})\sqrt{\frac{2(2,0 \text{ m})}{9,8 \text{ m/s}^2}} = 4,8 \text{ m}.$$

12 Na figura, uma bola maciça, de latão, de massa 0,280 g, rola suavemente ao longo do trilho quando é liberada a partir do repouso no trecho retilíneo. A parte circular do trilho tem um raio $R = 14,0$ cm e a bola tem um raio $r \ll R$. (a) Quanto vale h se a bola está na iminência de perder contato com o trilho quando chega ao ponto mais alto da parte curva do trilho? Se a bola é liberada a uma altura $h = 6,00 R$, qual é (b) o módulo e (c) qual é a orientação da componente horizontal da força que age sobre a bola no ponto Q?



12. Usando o solo como posição de referência para a energia potencial, a lei de conservação da energia mecânica nos dá

$$U_{\text{liberada}} = K_{\text{alto}} + U_{\text{alto}} \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mg(2R).$$

Fazendo $I = \frac{2}{5}mr^2$ [Tabela 10-2(f)] e $\omega = v_{\text{CM}}/r$ (Eq. 11-2), temos:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{v_{\text{CM}}}{r}\right)^2 + 2mgR \Rightarrow gh = \frac{7}{10}v_{\text{CM}}^2 + 2gR$$

sendo que, no lado direito, a equação foi dividida pela massa m .

(a) Para a bola estar na iminência de perder contato com o trilho no ponto mais alto do percurso, a força normal deve se anular nesse ponto. Sendo assim, a aplicação da Segunda Lei de Newton na direção do eixo y leva a

$$mg = ma_r \Rightarrow g = \frac{v_{\text{CM}}^2}{R-r}$$

em que usamos a Eq. 10-23 para expressar a aceleração radial (centrípeta) do centro de massa, que, nesse instante, está a uma distância $R - r$ do centro da curva. Substituindo o resultado $v_{\text{CM}}^2 = g(R - r)$ na expressão obtida anteriormente, temos:

$$gh = \frac{7}{10}(g)(R-r) + 2gR$$

o que nos dá $h = 2,7 R - 0,7r \approx 2,7 R$. Para $R = 14,0$ cm, temos

$$h = (2,7)(14,0 \text{ cm}) = 37,8 \text{ cm}.$$

(b) As considerações de energia usadas no item anterior (agora com $h = 6R$) podem ser aplicadas ao ponto Q, o que nos dá

$$g(6R) = \frac{7}{10}v_{\text{CM}}^2 + gR$$

ou $v_{\text{CM}}^2 = 50gR/7$. Aplicando a Segunda Lei de Newton ao eixo horizontal no ponto Q e usando o raciocínio anterior quanto à aceleração radial, temos:

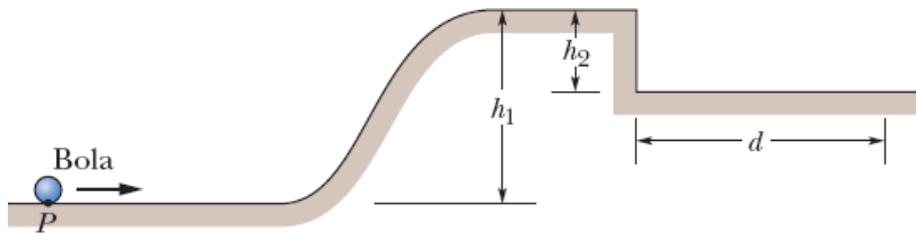
$$N = m \frac{v_{\text{CM}}^2}{R-r} = m \frac{50gR}{7(R-r)}$$

que, para $R \gg r$, nos dá

$$N = \frac{50mg}{7} = \frac{50(2,80 \times 10^{-4} \text{ kg})(9,80 \text{ m/s}^2)}{7} = 1,96 \times 10^{-2} \text{ N}.$$

(c) A orientação é para o centro da curva.

14 Na figura, uma bola pequena, maciça, homogênea, é lançada do ponto P, rola suavemente em uma superfície horizontal, sobe uma rampa e chega a um platô. Em seguida, deixa o platô horizontalmente para pousar em outra superfície mais abaixo, a uma distância horizontal d da extremidade do platô. As alturas verticais são $h_1 = 5,00$ cm e $h_2 = 1,60$ cm. Com que velocidade a bola deve ser lançada no ponto P para pousar em $d = 6,00$ cm?



14. Para calcular qual é a velocidade v do centro de massa da bola no platô, usamos as equações do movimento balístico do Capítulo 4. Com $v_{oy} = 0$ (e substituindo h_2 por h), a Eq. 4-22 nos dá um tempo de percurso $t = \sqrt{2h/g}$. Nesse caso, de acordo com a Eq. 4-21 (elevada ao quadrado, e usando d com alcance horizontal), $v^2 = gd^2/2h$. Para calcular a velocidade v_p no ponto P, aplicamos a lei de conservação da energia, ou seja, o fato de que a energia mecânica no platô deve ser igual à energia mecânica no ponto P. De acordo com a Eq. 11-5, temos:

$$mv^2/2 + I_{CM} \omega^2/2 + mgh_1 = mv_p^2/2 + I_{CM} \omega_p^2/2 .$$

Usando o item (f) da Tabela 10-2, a Eq. 11-2, a expressão $v^2 = gd^2/2h$, obtida anteriormente, temos:

$$gd^2/2h + 10gh_1/7 = v_p^2$$

o que nos dá (usando os dados do problema) $v_p = 1,34$ m/s.

Tabela 10-2

<p>Anel fino em relação ao eixo central</p> <p>$I = MR^2$</p> <p>(a)</p>	<p>Cilindro oco (ou anel grosso) em relação ao eixo central</p> <p>$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$</p> <p>(b)</p>	<p>Cilindro (ou disco) maciço em relação ao eixo central</p> <p>$I = \frac{1}{2}MR^2$</p> <p>(c)</p>
<p>Cilindro (ou disco) maciço em relação a um diâmetro central</p> <p>$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$</p> <p>(d)</p>	<p>Barra fina em relação a um eixo central perpendicular à maior dimensão</p> <p>$I = \frac{1}{12}ML^2$</p> <p>(e)</p>	<p>Esfera maciça em relação a um diâmetro</p> <p>$I = \frac{2}{5}MR^2$</p> <p>(f)</p>
<p>Casca esférica fina em relação a um diâmetro</p> <p>$I = \frac{2}{3}MR^2$</p> <p>(g)</p>	<p>Anel fino em relação a um diâmetro</p> <p>$I = \frac{1}{2}MR^2$</p> <p>(h)</p>	<p>Placa fina em relação a um eixo perpendicular passando pelo centro</p> <p>$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$</p> <p>(i)</p>

25 A força $\vec{F} = (-8,0 \text{ N}) \hat{i} + (6,0 \text{ N}) \hat{j}$ age sobre uma partícula cujo vetor posição é $\vec{r} = (3,0 \text{ N}) \hat{i} + (4,0 \text{ N}) \hat{j}$. (a) Qual é o torque em relação à origem a que está submetida a partícula, em termos dos vetores unitários? (b) Qual é o ângulo entre \vec{r} e \vec{F} ?

25. De acordo com a Eq. 3-30, se $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $\vec{r} \times \vec{F}$ é dado por

$$(yF_z - zF_y)\hat{i} + (zF_x - xF_z)\hat{j} + (xF_y - yF_x)\hat{k}.$$

(a) Substituindo por valores numéricos, temos:

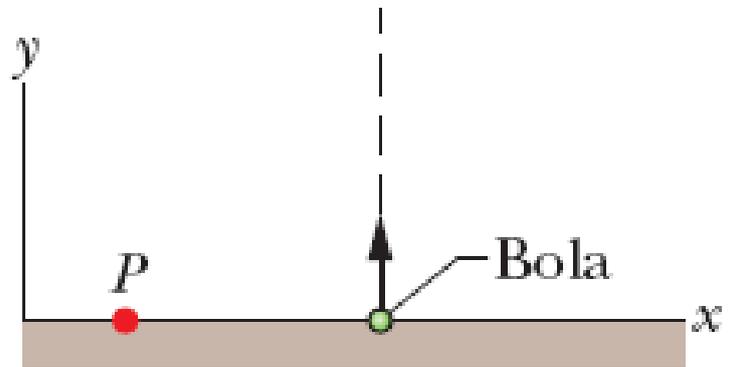
$$\vec{\tau} = [(3,0 \text{ m})(6,0 \text{ N}) - (4,0 \text{ m})(-8,0 \text{ N})] \hat{k} = (50 \text{ N}\cdot\text{m}) \hat{k}.$$

(b) De acordo com a Eq. 3-27, $|\vec{r} \times \vec{F}| = rF \sin \phi$, na qual ϕ é o ângulo entre \vec{r} e \vec{F} . Como $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 5,0 \text{ m}$ e $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 10 \text{ N}$, temos:

$$rF = (5,0 \text{ m})(10 \text{ N}) = 50 \text{ N}\cdot\text{m},$$

que é igual ao módulo do produto vetorial calculado no item (a). Isso significa que $\sin \phi = 1$ e, portanto, $\phi = 90^\circ$.

31 Na figura, uma bola de 0,400 kg é lançada verticalmente para cima com velocidade inicial de 40,0 m/s. Qual é o momento angular da bola em relação a P, um ponto a uma distância horizontal de 2,00 m do ponto de lançamento, quando a bola está (a) na altura máxima e (b) na metade do caminho de volta ao chão? Qual é o torque em relação a P a que a bola é submetida devido à força gravitacional quando está (c) na altura máxima e (d) na metade do caminho de volta ao chão?



31. (a) Como a velocidade é (momentaneamente) nula no instante em que a bola atinge a altura máxima, o momento angular nesse instante é zero.

(b) Com a convenção (usada em vários pontos deste livro) de que o sentido horário está associado ao sinal negativo, $L = -r_{\perp} m v$, sendo $r_{\perp} = 2,00$ m, $m = 0,400$ kg e v pode ser calculado a partir das equações de queda livre (como no Capítulo 2). Especificamente, y_{\max} pode ser calculado fazendo a velocidade igual a zero na Eq. 2-16; o resultado é $y_{\max} = v_0^2/2g$, em que $v_0 = 40,0$ m/s. Nesse caso, com $y = 1/2 y_{\max}$, a Eq. 2-16 nos dá $v = v_0 / \sqrt{2}$. Substituindo v por esse valor, obtemos $L = -22,6$ kg · m²/s.

(c) Como foi mencionado no item anterior, usamos o sinal negativo para o torque, o que nos dá $\tau = -r_{\perp} F$, em que $F = mg$. Assim, $\tau = -7,84$ N · m.

(d) Devido ao modo como r_{\perp} é definido, a altura da bola é irrelevante. Assim, a resposta é a mesma do item (c), $\tau = -7,84$ N · m.

35 No instante t , o vetor $\vec{r} = (3,0 t^2) \hat{i} + (2,0 t + 6,0 t^2) \hat{j}$ fornece a posição de uma partícula de 3,0 kg em relação à origem de um sistema de coordenadas xy (\vec{r} está em metros e t em segundos). (a) Escreva uma expressão para o torque em relação à origem que age sobre a partícula. (b) O módulo do momento angular da partícula em relação à origem está aumentando, diminuindo ou permanece o mesmo?

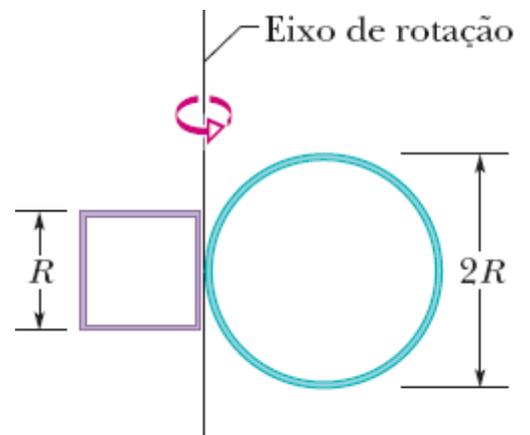
35. (a) Notamos que

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 8,0t \hat{i} - (2,0 + 12t) \hat{j}$$

com unidades do SI implícitas. De acordo com as Eqs. 3-30 e 11-18, o momento angular da partícula é $8t^2 \hat{k}$. De acordo com a Eq. 11-23, $\vec{\tau} = (48t \hat{k}) \text{ N} \cdot \text{m}$.

(b) Como o momento angular calculado no item (a) é proporcional a t^2 , o módulo do momento angular da partícula aumenta com o passar do tempo.

41 A figura mostra uma estrutura rígida formada por um aro, de raio R e massa m , e um quadrado feito de quatro barras finas, de comprimento R e massa m cada uma. A estrutura rígida gira com velocidade constante em torno de um eixo vertical, com um período de rotação de 2,5 s. Supondo que $R = 0,50$ m e $m = 2,0$ kg, calcule (a) o momento de inércia da estrutura em relação ao eixo de rotação e (b) o momento angular da estrutura em relação ao eixo.



41. (a) No caso do aro, usamos a Tabela 10-2(h) e o teorema dos eixos paralelos para obter

$$I_1 = I_{CM} + mh^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

No caso das barras, o momento de inércia da barra que coincide com o eixo de rotação é desprezível (por se tratar de uma barra fina) e o momento de inércia da barra paralela ao eixo de rotação, de acordo com o teorema dos eixos paralelos, é dado por

$$I_2 = I_{CM} + mR^2 = 0 + mR^2 = mR^2.$$

Por simetria, as duas barras perpendiculares ao eixo de rotação têm o mesmo momento de inércia ($I_3 = I_4$). Podemos calcular o valor de I_3 usando a Tabela 10-2(e) e o teorema dos eixos paralelos:

$$I_3 = I_{CM} = MR^2 = \frac{1}{12}mR^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mR^2.$$

Assim, o momento de inércia total é

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{19}{6}mR^2 = 1,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

(b) A velocidade angular é constante:

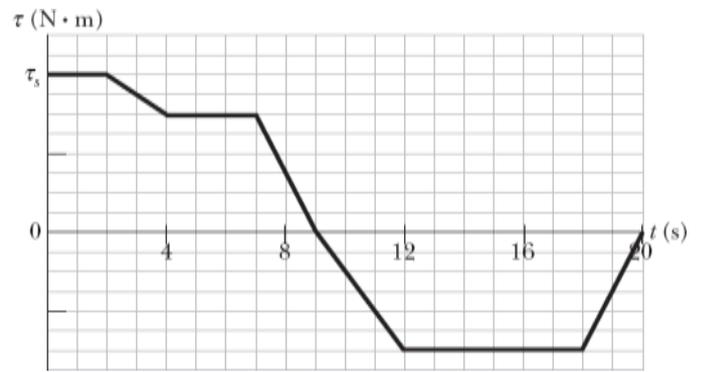
$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{2,5} = 2,5 \text{ rad/s}.$$

Assim, $L = I_{\text{total}}\omega = 4,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

Tabela 10.2

<p>Anel fino em relação ao eixo central</p> <p>$I = MR^2$</p> <p>(a)</p>	<p>Cilindro oco (ou anel grosso) em relação ao eixo central</p> <p>$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$</p> <p>(b)</p>	<p>Cilindro (ou disco) maciço em relação ao eixo central</p> <p>$I = \frac{1}{2}MR^2$</p> <p>(c)</p>
<p>Cilindro (ou disco) maciço em relação a um diâmetro central</p> <p>$I = \frac{3}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$</p> <p>(d)</p>	<p>Barra fina em relação a um eixo central perpendicular à maior dimensão</p> <p>$I = \frac{1}{12}ML^2$</p> <p>(e)</p>	<p>Esfera maciça em relação a um diâmetro</p> <p>$I = \frac{2}{5}MR^2$</p> <p>(f)</p>
<p>Casca esférica fina em relação a um diâmetro</p> <p>$I = \frac{2}{3}MR^2$</p> <p>(g)</p>	<p>Anel fino em relação a um diâmetro</p> <p>$I = \frac{1}{2}MR^2$</p> <p>(h)</p>	<p>Placa fina em relação a um eixo perpendicular passando pelo centro</p> <p>$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$</p> <p>(i)</p>

42. A figura mostra a variação com o tempo do torque τ que age sobre um disco inicialmente em repouso que pode girar como um carrossel em torno do centro. A escala do eixo t é definida por $t_s = 4,0 \text{ N} \cdot \text{m}$. Qual é o momento angular do disco em relação ao eixo de rotação no instante (a) $t = 7,0 \text{ s}$ e (b) no instante $t = 20 \text{ s}$?



42. Este problema pode ser resolvido integrando a Eq. 11-29 em relação ao tempo, tendo em mente que $\vec{L}_i = 0$ e que a integração pode ser vista como a soma das áreas sob os segmentos de reta, com as áreas sob o eixo dos tempos contribuindo negativamente. Também é útil saber que a área de um triângulo é (base)(altura)/2.

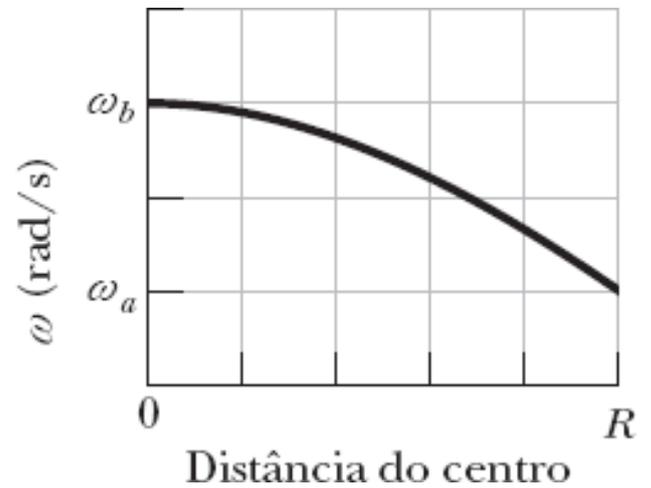
(a) $\vec{L} = 24 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$

(b) $\vec{L} = 1,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$

Equação 11-29:

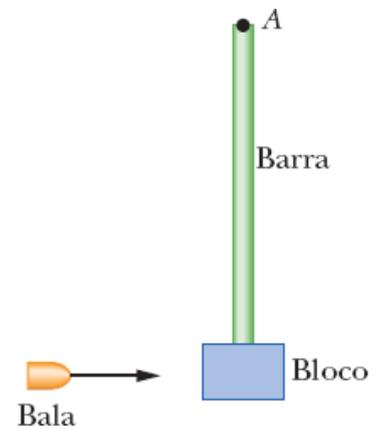
$$\vec{\tau}_{res} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

48 Uma barata está no centro de um disco circular que gira livremente como um carrossel, sem torques externos. A barata caminha em direção à borda do disco, cujo raio é R . A figura mostra a velocidade angular ω do sistema barata-disco durante a caminhada. A escala do eixo ω é definida por $\omega_a = 5,0$ rad/s e $\omega_b = 6,0$ rad/s. Qual é a razão entre o momento de inércia do inseto e o momento de inércia do disco, ambos calculados em relação ao eixo de rotação, quando a barata chega à borda do disco?



48. Combinando a Eq. 11-31 com a lei de conservação do momento angular, $L_i = L_f$ (Eq. 11-33), vemos que a razão dos momentos de inércia é inversamente proporcional à razão das velocidades angulares: $I_f/I_i = \omega_i/\omega_f = 6/5 = 1,0 + 0,2$. Interpretamos o “1,0” como a razão entre o momento de inércia do disco e o próprio momento de inércia do disco (que, naturalmente, é igual à unidade) e o “0,2” como a razão entre o momento de inércia da barata e o momento de inércia do disco. Assim, a resposta é 0,20.

60 Na Fig. figura, uma bala de 1,0 g é disparada contra um bloco de 0,50 kg preso à extremidade de uma barra não homogênea, de 0,50 kg com 0,60 m de comprimento. O sistema bloco-barra-bala passa a girar no plano do papel, em torno de um eixo fixo que passa pelo ponto A. O momento de inércia da barra em relação a esse eixo é 0,060 kg m². Trate o bloco como uma partícula. (a) Qual é o momento de inércia do sistema bloco-haste-bala em relação ao eixo que passa pelo ponto A? (b) Se a velocidade angular do sistema em relação ao eixo que passa pelo ponto A imediatamente após o impacto é 4,5 rad/s, qual é a velocidade da bala imediatamente antes do impacto?



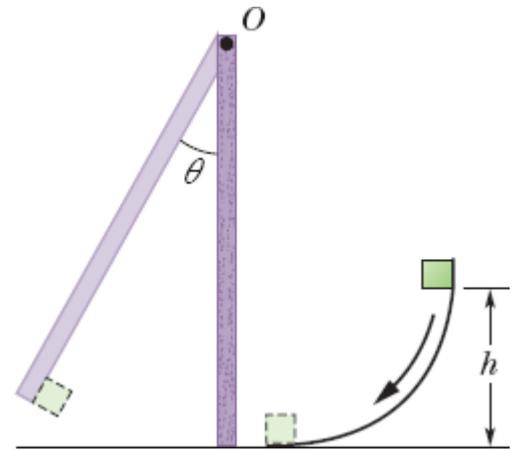
60. (a) Para $r = 0,60$ m, temos $I = 0,060 + (0,501)r^2 = 0,24$ kg · m².

(b) De acordo com a lei de conservação do momento angular, usando unidades do SI, temos:

$$\ell_0 = L_f \Rightarrow mv_0 r = I\omega \Rightarrow (0,001)v_0(0,60) = (0,24)(4,5),$$

o que nos dá $v_0 = 1,8 \times 10^3$ m/s.

66 Na figura, um pequeno bloco de 50 g desliza para baixo em uma superfície curva, sem atrito, a partir de uma altura $h = 20$ cm e depois adere a uma barra homogênea, de massa 100 g e comprimento 40 cm. A barra gira de um ângulo θ em torno do ponto O antes de parar momentaneamente. Determine θ .



66. Ao contrário do que costumamos fazer, escolhemos o sentido *horário* de rotação como positivo para que as velocidades angulares (e os ângulos) deste problema sejam positivos. Aplicando a lei de conservação da energia mecânica à partícula (antes do impacto), obtemos a relação

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

que nos dá a velocidade da partícula no momento do impacto. Aplicando a lei de conservação do momento angular à colisão, temos:

$$mvd = (I_{\text{barra}} + md^2)\omega$$

em que I_{barra} pode ser calculado usando a Tabela 10-2(e) e o teorema dos eixos paralelos:

$$I_{\text{barra}} = \frac{1}{12}Md^2 + M\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}Md^2.$$

Assim, a velocidade angular do sistema imediatamente após a colisão é

$$\omega = \frac{md\sqrt{2gh}}{(Md^2/3) + md^2},$$

o que significa que o sistema possui uma energia cinética $(I_{\text{barra}} + md^2)\omega^2/2$, que é totalmente convertida em energia potencial na posição em que o bloco para momentaneamente depois de atingir uma altura H em relação ao ponto mais baixo da trajetória. Nesse instante, o centro de massa da barra está a uma altura $H/2$. Usando relações trigonométricas, é fácil demonstrar que $H = d(1 - \cos\theta)$, que nos leva à seguinte relação:

$$\frac{1}{2}(I_{\text{barra}} + md^2)\omega^2 = mgH + Mg\frac{H}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{m^2d^2(2gh)}{(Md^2/3) + md^2} = \left(m + \frac{M}{2}\right)gd(1 - \cos\theta).$$

Explicitando θ , temos:

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1}\left(1 - \frac{m^2h}{(m + M/2)(m + M/3)}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{h/d}{(1 + M/2m)(1 + M/3m)}\right) \\ &= \cos^{-1}\left(1 - \frac{(20 \text{ cm} / 40 \text{ cm})}{(1 + 1)(1 + 2/3)}\right) = \cos^{-1}(0,85) \\ &= 32^\circ. \end{aligned}$$