TE231
Capitulo 2 – Zeros de Funções;

Prof. Mateus Duarte Teixeira

Sumário

1. Como obter raízes reais de uma equação qualquer
2. Métodos iterativos para obtenção de raízes
   1. Isolamento das raízes
   2. Refinamento
3. Método da Bissecção ou Dicotomia
4. Exercícios

1. Introdução

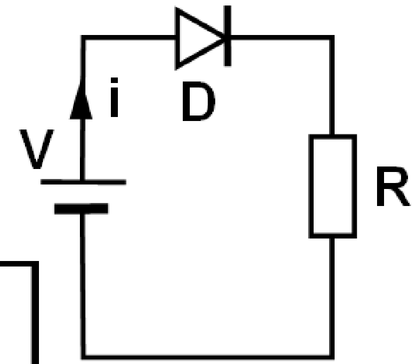
Problema de Interesse

Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, um problema de grande interesse é a determinação da existência e cálculo de uma raiz x de f, ou seja:

$$x \text{ tal que } f(x) = 0$$

Introdução de um diodo no circuito:

$$v(i) = \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{i}{I_s} + 1\right) \qquad V - R \cdot i - \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{i}{I_s} + 1\right) = 0$$



Solução utilizando métodos numéricos

2. **Objetivos**

- Estudar métodos numéricos para a resolução de equações não lineares (determinar a(s) raiz(es) de uma função $f(x)$, ou seja, encontrar o(s) valor(es) de x tal que $f(x) = 0$)

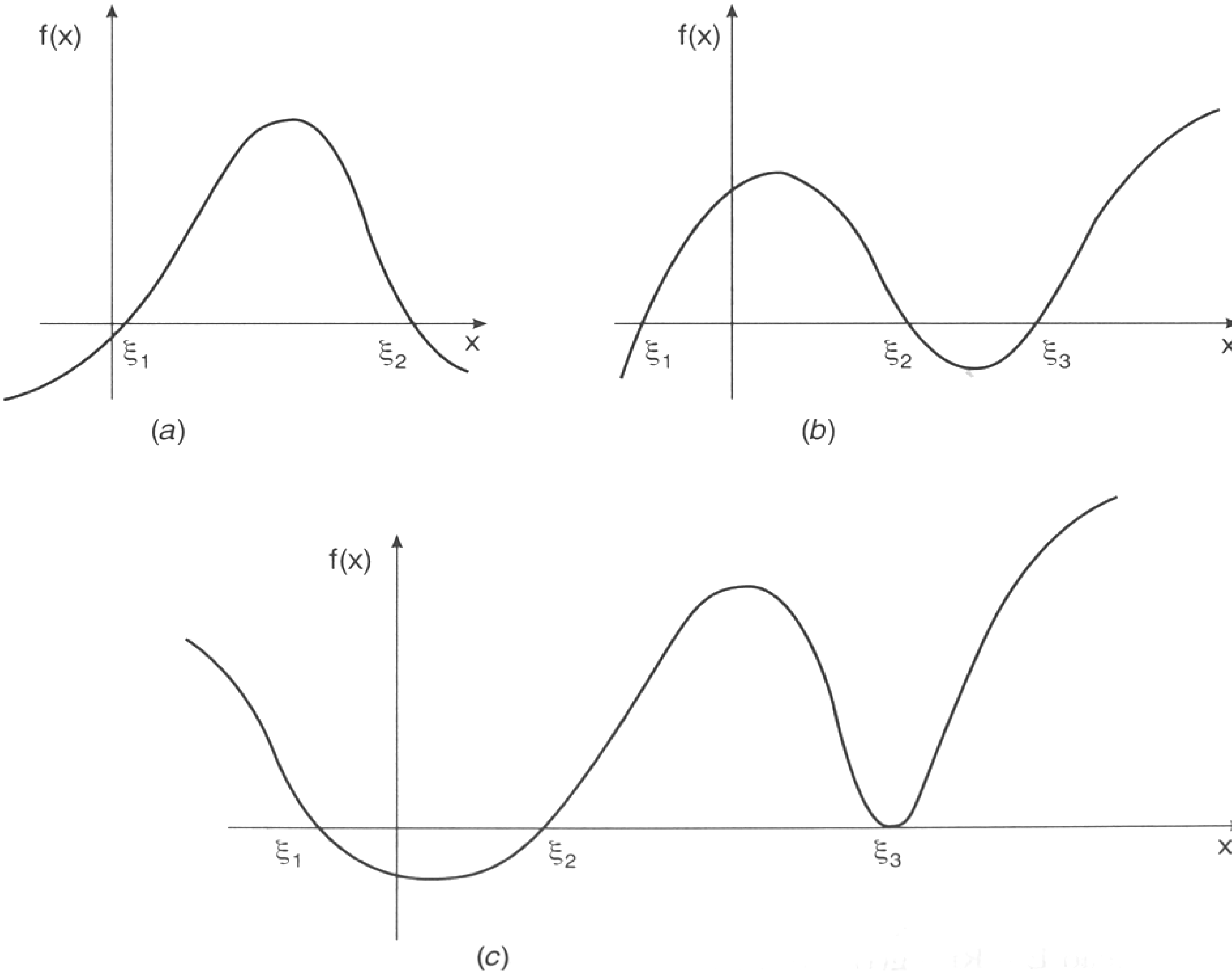
  - Fundamentar a necessidade de uso de métodos numéricos para a resolução de equações não lineares

  - Discutir o princípio básico que rege os métodos numéricos para a resolução de equações não lineares

  - Apresentar uma série de métodos destinados à resolução de equações não lineares

Zero de uma função

Um número real ξ é um zero da função $f(x)$ ou uma raiz da equação $f(x) = 0$ se $f(\xi) = 0$;

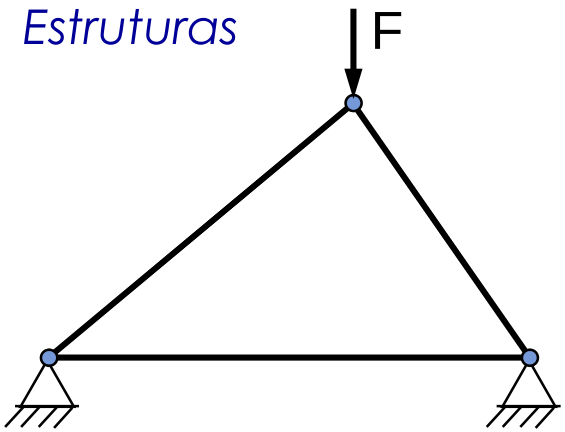

f(x)
x
ξ1
ξ2
(a)
f(x)
x
ξ1
ξ2
ξ3
(b)
f(x)
x
ξ1
ξ2
ξ3
(c)

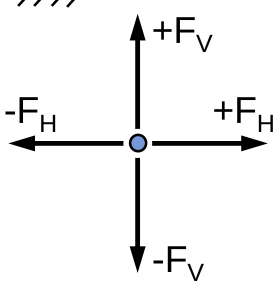
Necessidade de resolução de equações do tipo *f(x) = 0*

Principio da Conservação

- Momento
- Energia
- Massa

Estruturas

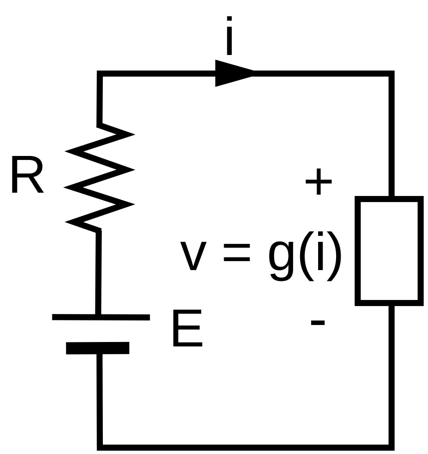




Em cada *nó* :

$$\sum F_H = 0$$
$$\sum F_V = 0$$

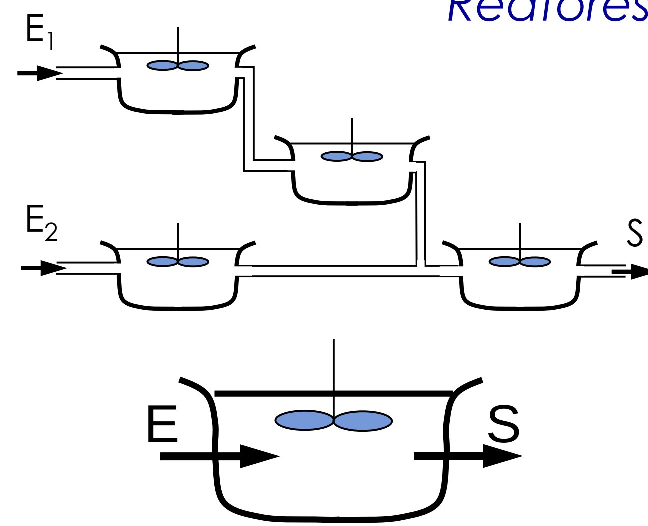
Circuitos



$$E - Ri - g(i) = 0$$

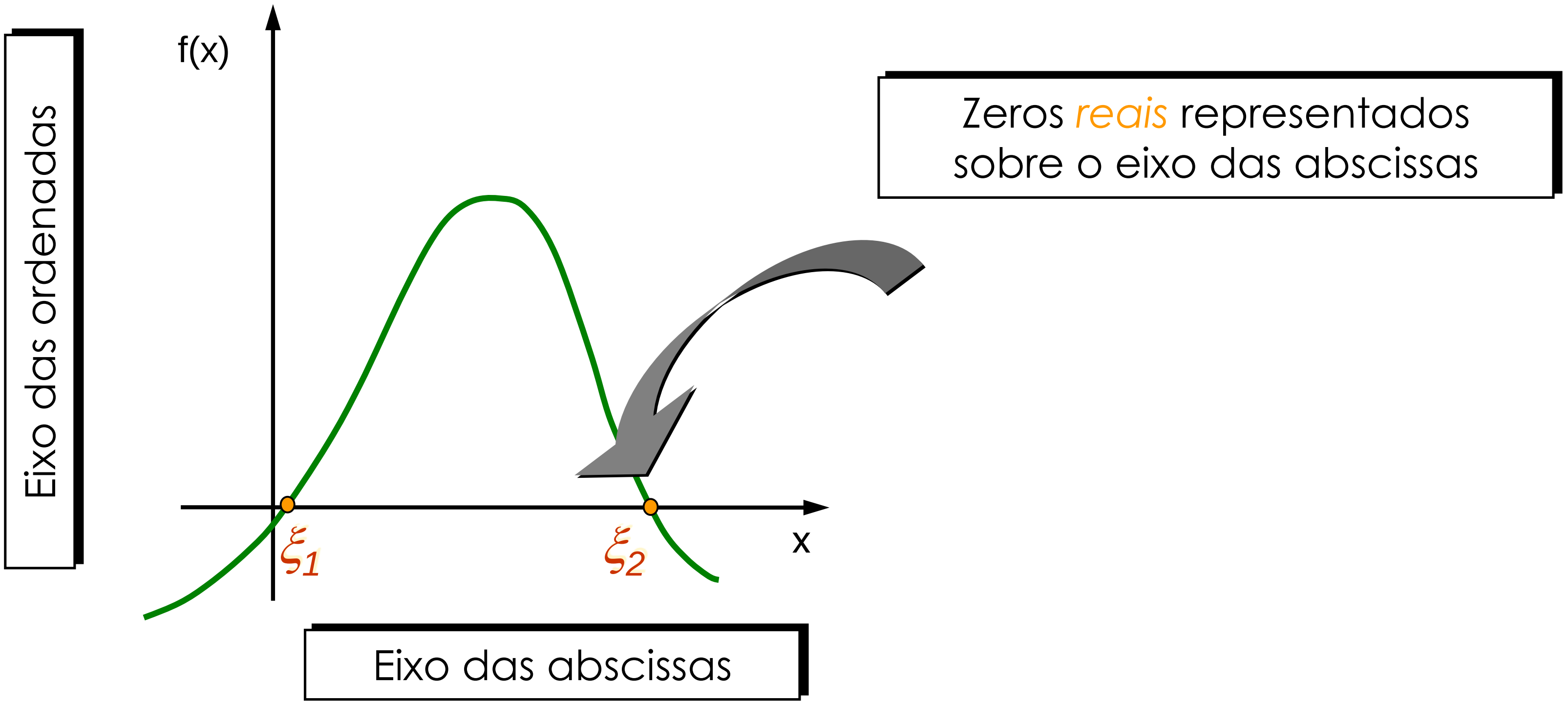
(Lei de Kirchhoff)

Reatores



Em um dado intervalo:
$\sum$massa = entradas - saídas

- Zeros podem ser reais ou complexos.
- Neste curso vamos tratar somente de zeros reais de f(x).



- A partir de uma equação de 2º grau da forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- Determinação das raízes em função de **a**, **b** e **c**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Polinômios de grau mais elevado e funções com maior grau de complexidade
  - Impossibilidade de determinação exata dos zeros

- Assim, é possível determinar através de métodos formais raízes de polinômios até grau 3 ou maior (em certas condições).

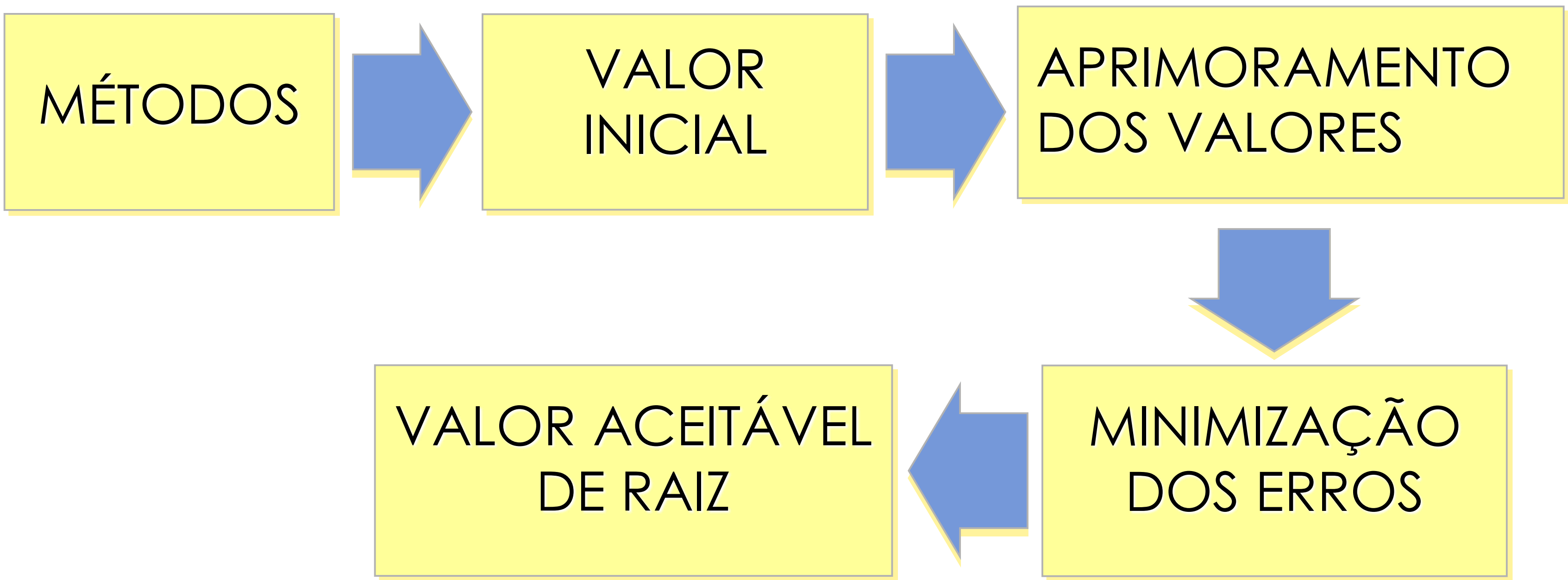
- Algumas funções podem ser transformadas em polinômios e suas raízes podem ser obtidas.
  - $5x + 2 = 0$; $x^2 + 4x - 3 = 0$
  - $3\text{sen}(x) + 5 = 0$; $\cos^2(x) + 2\cos(x) + 5 = 0$

- Equações Transcendentais (não-algébricas):
  - Combinam funções trigonométricas (seno, cosseno,...), exponenciais (e^x, 3^{x2},...) ou logarítmicas (log x, ln x, ...).
  - Para obter o(s) zero(s) destas funções os métodos numéricos devem ser utilizados.

Como obter raízes reais de uma equação qualquer?

- Sabemos que, para algumas equações, como por exemplo as equações polinomiais do segundo grau, existem fórmulas explícitas que dão as raízes em função dos coeficientes;
- No entanto, no caso de polinômios de grau mais alto e no caso de funções mais complexas, é praticamente impossível se achar os zeros exatamente;
- Por isso, temos que nos contentar em encontrar apenas aproximações para esses zeros;
- Mas como?

Princípio Básico dos Métodos Numéricos



- Etapas Usuais para a Determinação de Raízes a partir de Métodos Numéricos

MÉTODOS → FASE I: Isolamento das raízes → FASE II: Refinamento das raízes

FASE I — Isolamento das raízes: Determinação de um intervalo (o menor possível) que contenha apenas uma raiz

FASE II — Refinamento das raízes: Melhoramento do valor da raiz aproximada (refinamento até a precisão desejada).

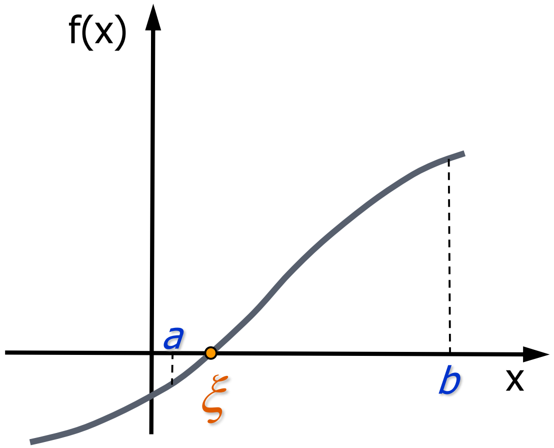
3. Métodos iterativos para obtenção de raízes

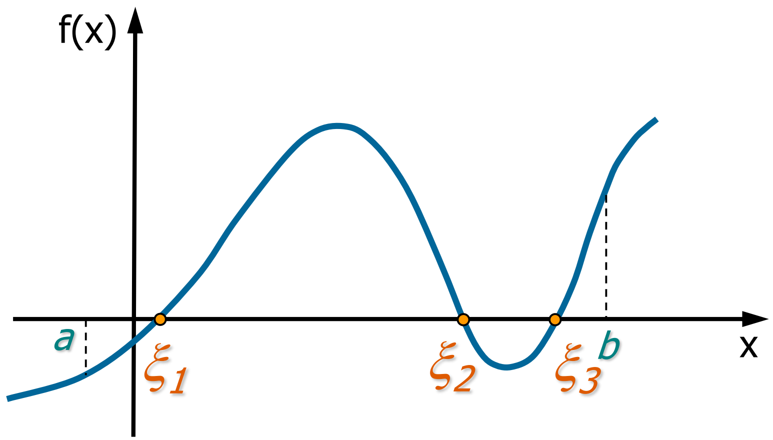
- A ideia central desses métodos é partir de uma aproximação inicial para a raiz e em seguida refinar essa aproximação através de um processo iterativo;
- Esses métodos contemplam duas fases:
  - Fase I: Localização ou isolamento das raízes, que consiste em obter um intervalo que contém a raiz;
  - Fase II: Refinamento, que consiste em melhorar as aproximações iniciais obtidas na Fase I até atingir uma aproximação para raiz dentro de uma precisão prefixada.

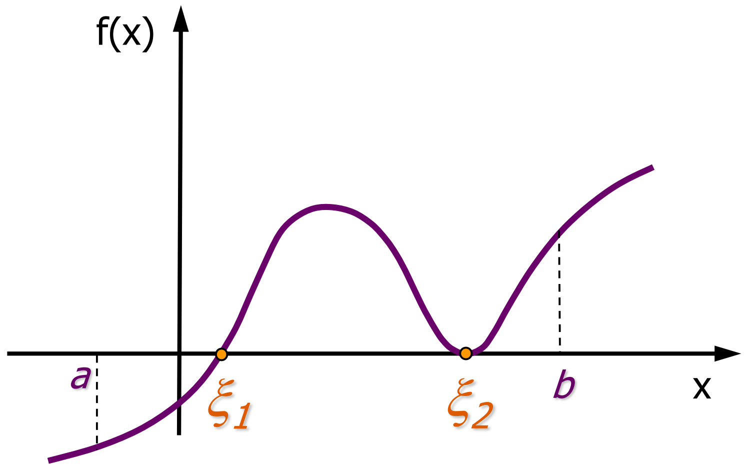
Fase I - Isolamento das Raízes

- Nesta fase é feita uma análise teórica e gráfica da função f(x);
- Na análise teórica usamos o teorema:
  - Seja f(x) uma função contínua num intervalo [a, b]. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ então existe pelo menos um ponto $x = \xi$ entre a e b que é zero de f(x), ou seja, $f(\xi) = 0$.

Isolamento das Raízes
Análise Teórica (Graficamente)







- Sendo f(x) contínua em um intervalo [a, b], se f(a)f(b) < 0 então existe pelo menos um ponto x = ξ entre a e b que é zero de f(x).
- **Exemplo 01:** ***f(x) = x^3 – 9x +3***

x	-∞	-100	-10	-5	-3	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	–	–	–	–	+	+	+	–	–	+	+	+

f(x) é contínua para ∀x ∈ R.

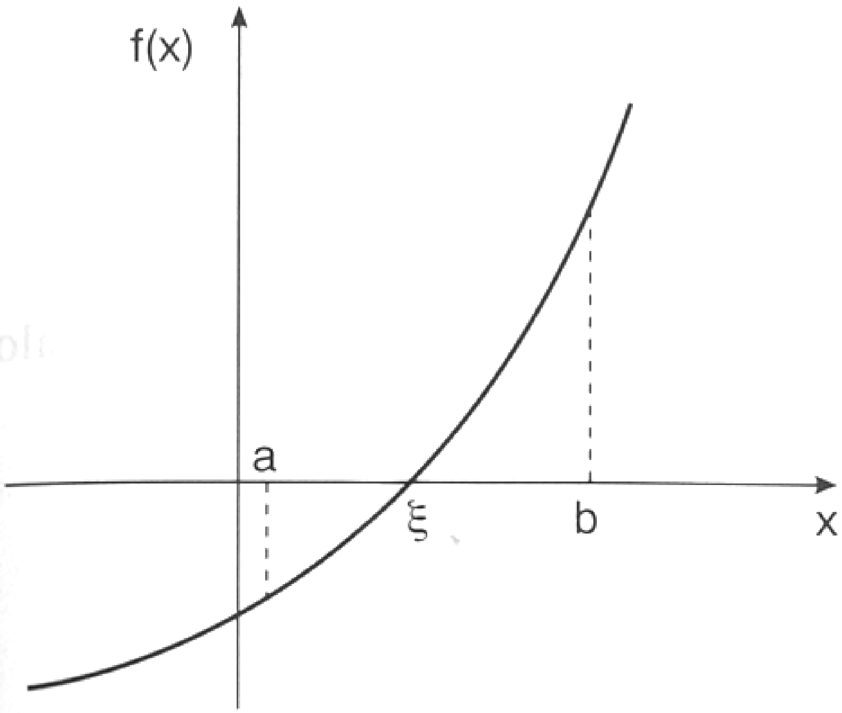
- I_1 = [-5, -3]
- I_2 = [0, 1]
- I_3 = [2, 3]

Cada um dos intervalos contém pelo menos um *zero*.

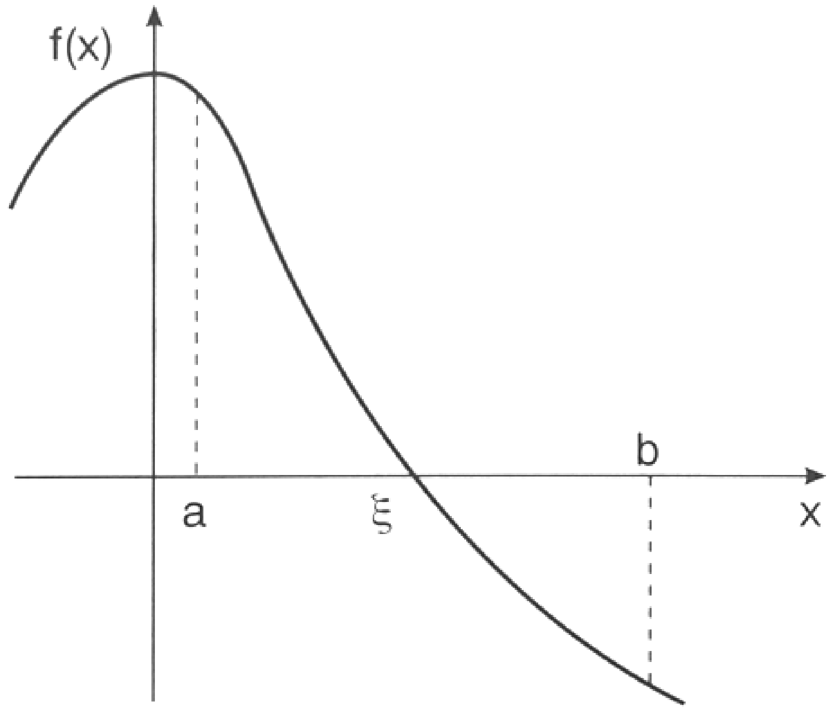
Isolamento das Raízes - Análise Teórica

- Como garantir que só existe uma raiz em um intervalo [a, b]?
  - Através da análise do sinal da derivada de f(x);
  - Se f'(x) existir e preservar sinal no intervalo [a, b], então esse intervalo contém um único zero de f(x).

Análise do sinal da derivada graficamente



$f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$



$f'(x) < 0, \forall x \in [a, b]$

Isolamento das Raízes - Análise Gráfica

- A análise gráfica da função f(x) é fundamental para se obter boas aproximações para a raiz. Para tal, temos os seguintes processos:
  - Esboçar o gráfico da função f(x) e localizar as abscissas dos pontos onde a curva intercepta o eixo x;
  - A partir da equação f(x) = 0, obter a equação equivalente g(x) = h(x), esboçar os gráficos das funções g(x) e h(x) e localizar os pontos x onde as duas curvas se interceptam;
  - Usar programas que traçam gráficos de funções.

Análise Gráfica

ANÁLISE GRÁFICA

I

Construção do gráfico de *f(x)*

Localização das abscissas dos pontos nos quais a curva intercepta o eixo $\overrightarrow{ox}$

II

Obtenção da equação equivalente *g(x) = h(x)* a partir da equação *f(x) = 0*

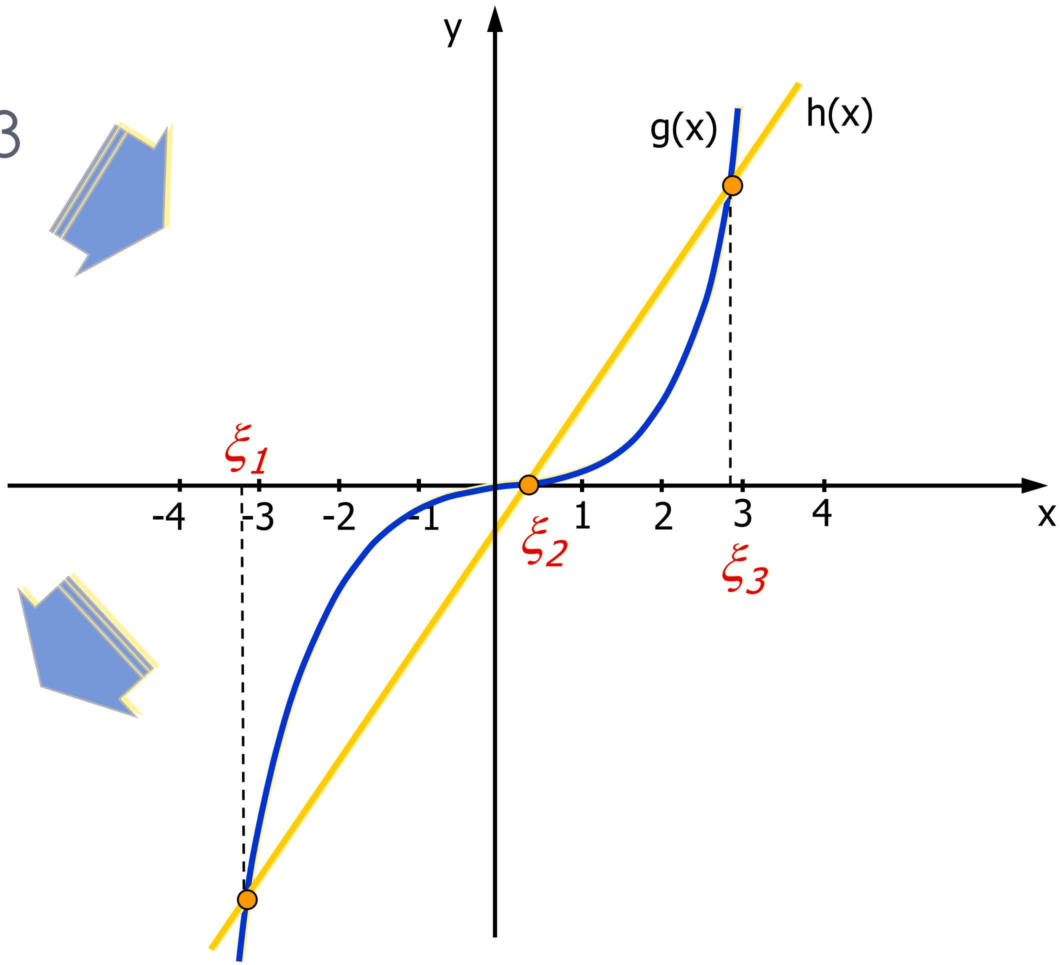
Construção dos gráficos de *g(x)* e *h(x)* no mesmo sistema cartesiano

III

Uso de programas para traçado de gráficos de funções

Localização dos pontos *x* nos quais *g(x)* e *h(x)* se interceptam ($f(\xi) = 0 \Leftrightarrow g(\xi) = h(\xi)$)

- $f(x) = x^3 - 9x + 3$
  - $g(x) = x^3$
  - $h(x) = 9x - 3$



- $\xi_1 \in (-4, -3)$
- $\xi_2 \in (0, 1)$
- $\xi_3 \in (2, 3)$

Fase II - Refinamento

- Como já mencionado anteriormente estamos estudando métodos iterativos. Mas o que é um método iterativo?
- Um método iterativo consiste em uma sequência de instruções que são executadas passo a passo, algumas das quais são repetidas em ciclos.
- A execução de um ciclo recebe o nome de iteração.

Refinamento - Critérios de Parada

- Quando utilizamos um método iterativo precisamos decidir o momento de parar;
- Que tipo de teste efetuar para verificar se a raiz aproximada (δ) está suficientemente próximo da raiz exata (ξ)?
- δ é raiz aproximada com precisão ε se:
- $| \delta - \xi | < \varepsilon$ ou
- $| f(\delta) | < \varepsilon$

Refinamento - Critérios de Parada

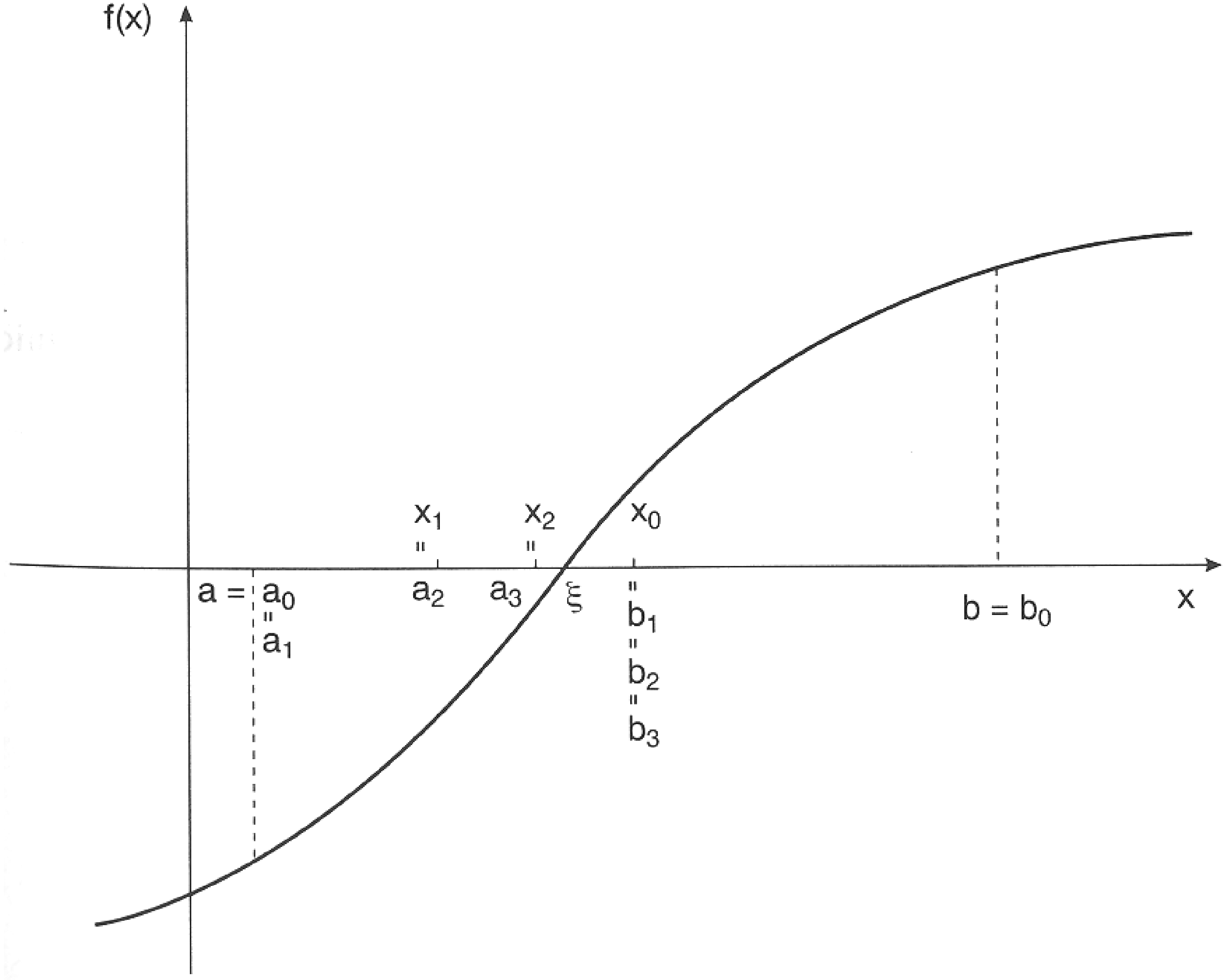
- Como não conhecemos a raiz ξ , uma forma de efetuar o teste de parada é reduzir o intervalo que contém a raiz, até conseguir um intervalo [a, b] tal que:

$$\left.\begin{array}{l} \xi \in [a,b] \\ b-a<\varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \forall x \in [a,b], |x-\xi| < \varepsilon$$

4. Método da Bissecção ou Dicotomia

- Seja a função f(x) contínua no intervalo [a, b] e tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$;
- O objetivo deste método é reduzir a amplitude do intervalo que contém a raiz até atingir a precisão requerida: $(b - a) < \varepsilon$, usando para isto a sucessiva divisão de [a, b] ao meio.
- Cada novo $x_k = (a_k + b_k)/2$ será o novo a_{k+1} ou b_{k+1} de modo a manter válido o teorema acima

- Graficamente



- Ex: Achar a raiz da equação $f(x) = x^3 - 10$ no intervalo [2,3] com o erro absoluto $\delta < 0{,}1$

$$f(2) * f(3) = -2 * 17 < 0$$

$$x_0 = (2+3)/2 = 2{,}5 \rightarrow f(2{,}5) = 5{,}62 \qquad a = 2 \;\; b = 3$$

$$x_1 = (2+2{,}5)/2 = 2{,}25 \rightarrow f(2{,}25) = 1{,}39 \qquad a = 2 \;\; b = 2{,}5$$

$$x_2 = (2+2{,}25)/2 = 2{,}12 \rightarrow f(2{,}15) = -0{,}40 \qquad a = 2 \;\; b = 2{,}25$$

$$x_3 = (2{,}12+2{,}25)/2 = 2{,}18 \rightarrow f(2{,}18) = 0{,}46 \qquad a = 2{,}12 \;\; b = 2{,}25$$

$$\varepsilon = 2{,}18 - 2{,}12 = 0{,}06$$

- Dada uma precisão ε e um intervalo inicial [a, b], é possível saber quantas iterações serão efetuadas pelo método da bissecção até que se obtenha b – a < ε;
- Como achar a quantidade de iterações mínimas para se encontrar o zero de uma função?

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

$$\frac{b_0 - a_0}{2^k} < \varepsilon \Rightarrow 2^k > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \Rightarrow k.\log(2) > \log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon) \Rightarrow$$

$$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

- Vantagens:
  - Simples
  - Converge sempre
- Desvantagens:
  - Convergência lenta

Exercício:

- $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$

  $\varepsilon = 0{,}001$

- $f(x) = e^x - 5x$

  Intervalo [2,4; 2,6]

  R: $2{,}5427 \pm 0{,}00003$

  $\varepsilon = 0{,}0001$

- $f(x) = 3x^3 - 4$

  Intervalo [0, 2]

  R: $1{,}1007 \pm 0{,}00006$

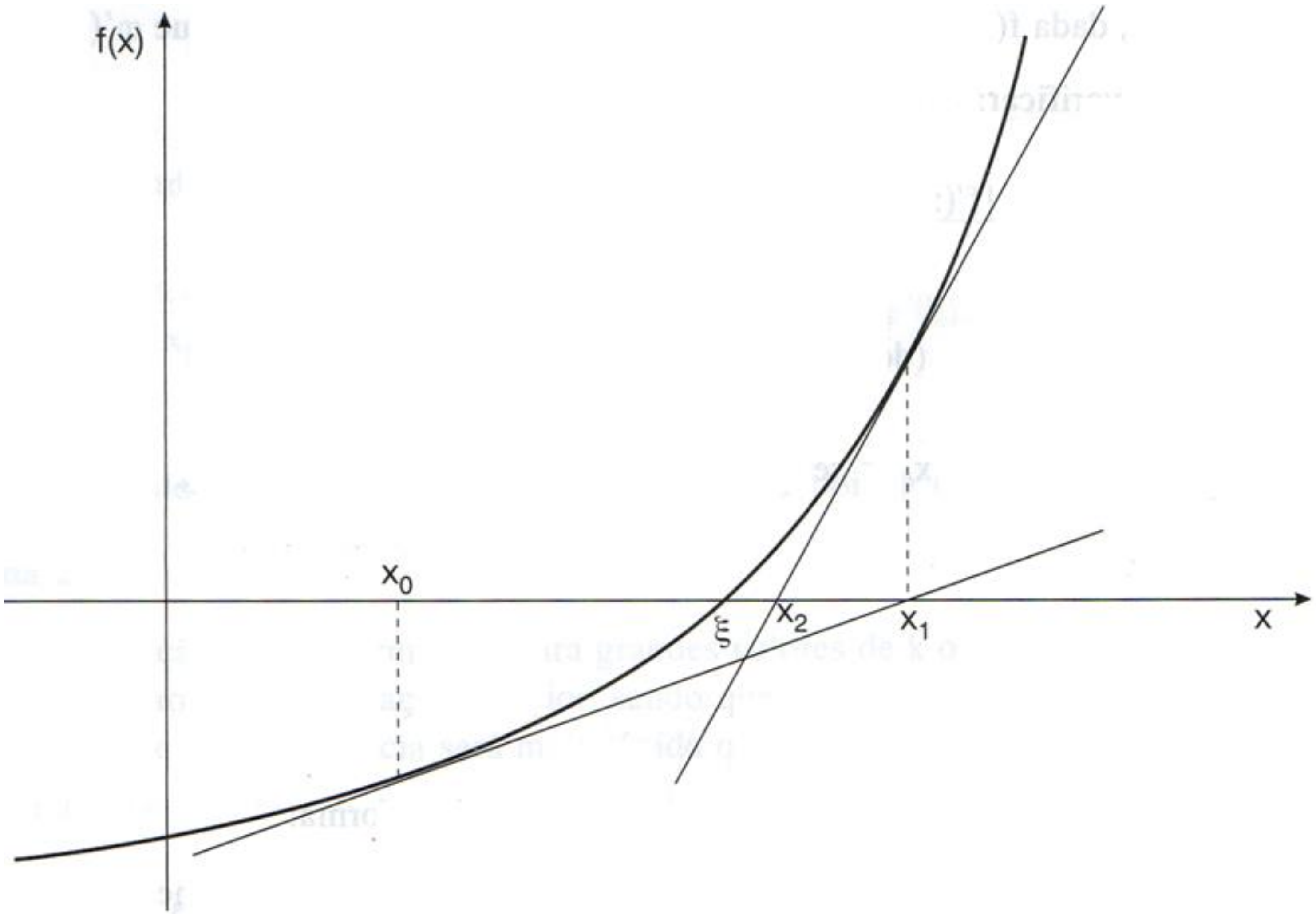
  $\varepsilon = 0{,}0001$

5. Método de Newton-Raphson

- Supondo uma aproximação x_0 para a raiz de f(x), no ponto $(x_0, f(x_0))$ passa apenas uma única reta tangente, que é a derivada de f(x) em x_0. Esta reta tangente corta o eixo x na coordenada x_1,definindo por sua vez, o ponto $(x_1, f(x_1))$
- Por este novo ponto também passa uma única reta tangente que corta o eixo x em x_2. Esta nova coordenada define outro ponto $(x_2, f(x_2))$ que repete todo o processo
- $x_0, x_1, \ldots$ são aproximações cada vez melhores para a raiz da função, o X_{k+1} pode ser obtido a partir do X_k através da função:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Graficamente



- Convergência
  - Caso se escolha x_0 de forma que x_1 saia do intervalo [a,b] o método poderá não convergir.

Ex: Ache a raiz da equação $f(x) = x^2 + \ln(x)$ para o erro relativo $\delta = 0,01 \; e \; [0,5; \; 1]$, ou seja:

$$\left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| < \delta$$

Se

$$f(x) = x^2 + \ln(x)$$

Então

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$$

$x_0 = 0{,}5$

$$x1 = 0{,}5 - \frac{f(0{,}5)}{f'(0{,}5)} = 0{,}5 - \frac{-0{,}44}{3} = 0{,}65$$

$$x2 = 0{,}65 - \frac{f(0{,}65)}{f'(0{,}65)} = 0{,}65$$

$$\left| \frac{0{,}65 - 0{,}65}{0{,}65} \right| < 0{,}01$$

- Vantagens:
  - Simples
  - Rápida convergência

- Desvantagens:
  - Nem sempre converge
  - Necessidade de se conhecer a derivada da função
  - Muito sensível à estimativa inicial
  - Se a derivada for nula o método falha

Exercício:

- $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$

$\varepsilon = 0,001$

- $f(x) = e^x - 5x$ Intervalo [2,4; 2,6]

$\varepsilon = 0,0001$

- $f(x) = 3x^3 - 4$ Intervalo [0, 2]

$\varepsilon = 0,0001$

6. Método da Secante

- Uma grande desvantagem do método de Newton é a necessidade de se obter f'(x) e calcular seu valor numérico a cada iteração.
- Uma forma de se contornar este problema é substituir a derivada f'(x) pelo quociente das diferenças
- $f'(x_k) \approx (f(x_k) - f(x_{k-1})) / (x_k - x_{k-1})$

Entrada: Valor da aproximação, x_0 e x_{-1}, para a raiz r e o limite de erro, δ

Saída: Valor aproximado da raiz da função, $\tilde{r}$, ou mensagem de erro

for $n = 0$ até N_{max} **do**

Calcular $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

if $\left|\dfrac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}}\right| < \delta$ **then**

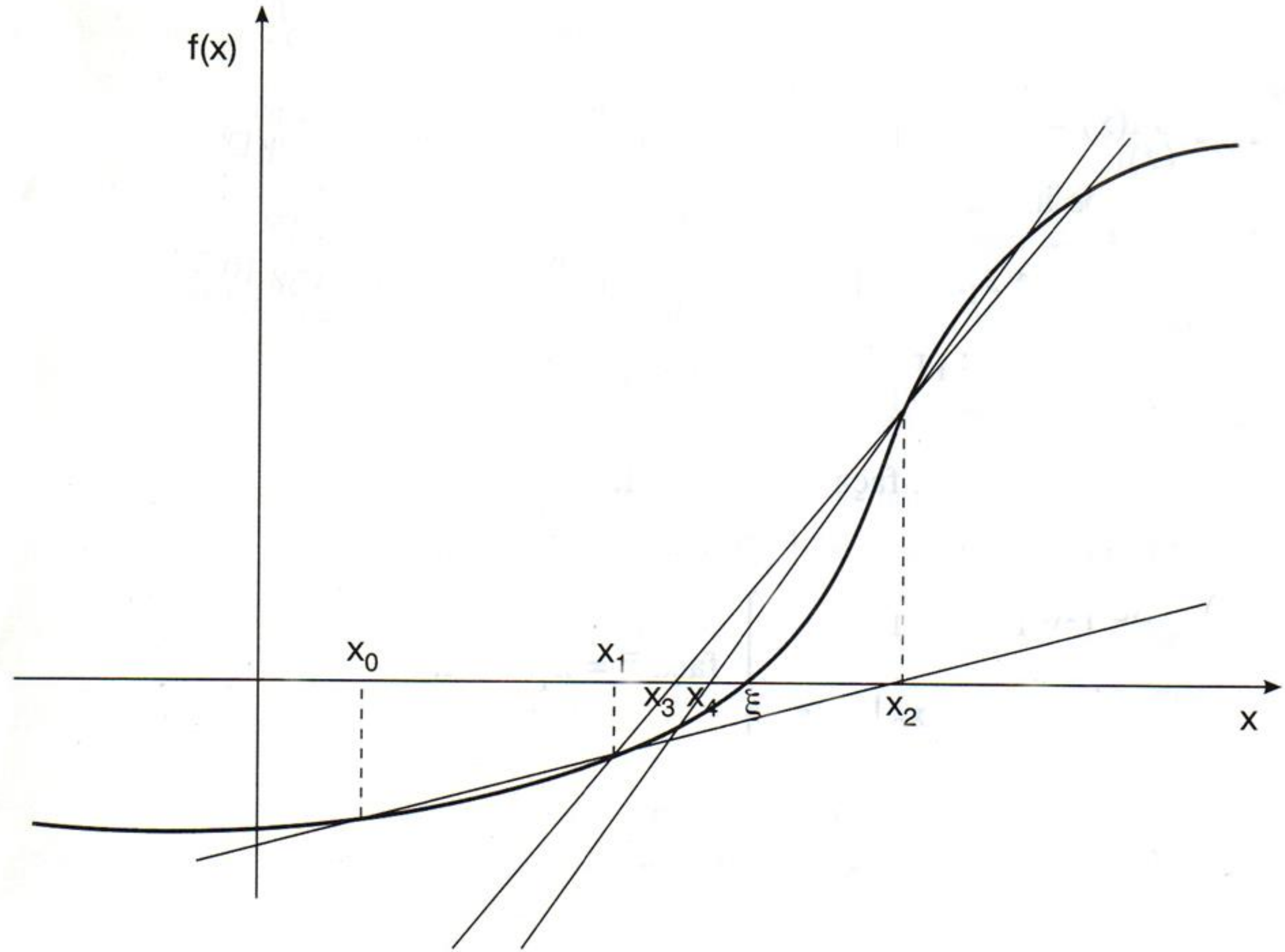
Apresente x_{n+1} como raiz; FIM

end if

Fazer $x_{n-1} = x_n$ e $x_n = x_{n+1}$

end for

Método falhou em n iterações; FIM


f(x)
x0
x1
x3
x4
ξ
x2
x

- Vantagens:
  - Simples
  - Rápida convergência como o método deNewton e não necessita do conhecimento da derivada da função
- Desvantagens:
  - Nem sempre converge
  - Muito sensível à estimativa inicial
  - Se a derivada for nula o método falha

7. Comparação entre os Métodos

- O método da Bisseção sempre converge para uma solução;
- O esforço computacional do método da bisseção cresce demasiadamente quando se aumenta a exatidão da raiz desejada;
- Deve ser usado apenas para diminuir o intervalo que contém a raiz para posterior aplicação de outro método, como o método de Newton, por exemplo;
- O método da Secante é uma aproximação para o método de Newton;
- Ao contrário do método da Bisseção o método da Secante e de Newton podem não convergir.

- O método da bisseção é bastante simples por não exigir o conhecimento da derivada da equação em questão, porém possui uma convergência lenta;
- O método de Newton é o que apresenta a convergência mais rápida, porém exige o conhecimento da derivada analítica da função em questão;
- O método da Secante é mais lento que o de Newton, porém não exige o conhecimento da derivada analítica da função em questão;