



# Controle e servomecanismo

TE240

Análise no domínio da frequência

Juliana L. M. Iamamura

# Análise no domínio da frequência

- Projetos simples
- Não é necessário conhecer polos e zeros
- Sinais decompostos em somas de sinais exponenciais
- Uma ferramenta bastante utilizada é o diagrama de Bode

# Diagramas de Bode

- Podem ser obtidos experimentalmente
- Somam-se os diagramas de sistemas em série
- O uso da escala log permite a análise de uma larga gama de frequências
- Podem ser utilizados para o projeto de controladores

# Diagrama de Bode

- **Frequência** (Hz) em escala logarítmica
- **Amplitude** (dB) em escala logarítmica
- **Fase** (graus) em escala aritmética
- **Frequência de corte:** frequência na qual ocorre uma redução de 3dB no sinal
- **Banda de passagem:** faixa de frequências transmitidas pelo sistema

# Diagrama de Bode

- Sinal rápido  $\Rightarrow$  frequência elevada
- Quanto menor a frequência de corte, mais lento é o sinal
- Picos:
  - Polos reais  $\Rightarrow$  ausência de pico
  - Quanto maior o amortecimento, menor é o pico
  - Em sistemas de ordem elevada, os picos indicam polos pouco amortecidos

# Diagrama de Bode

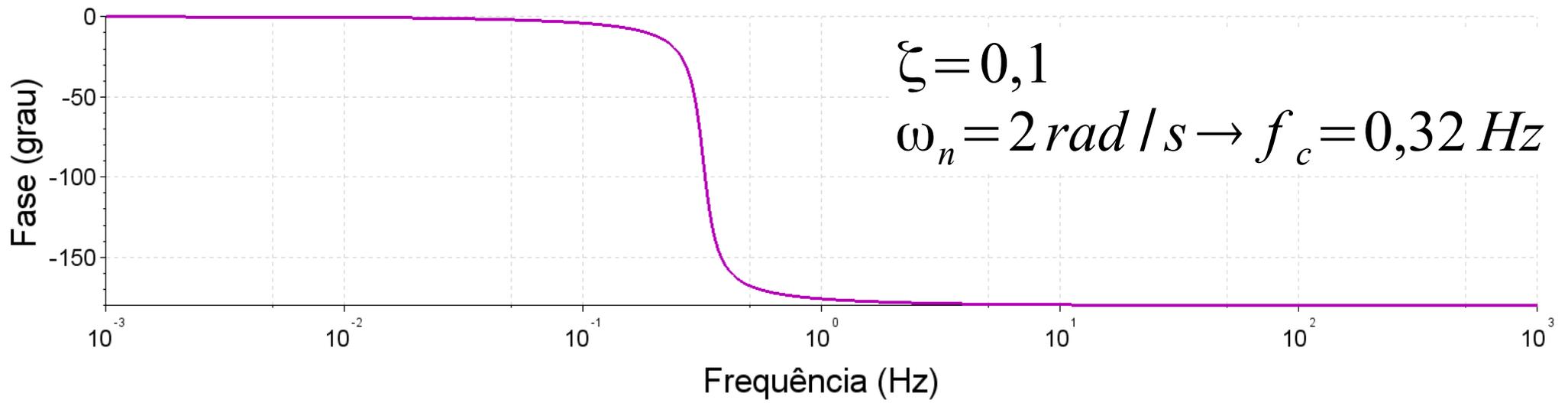
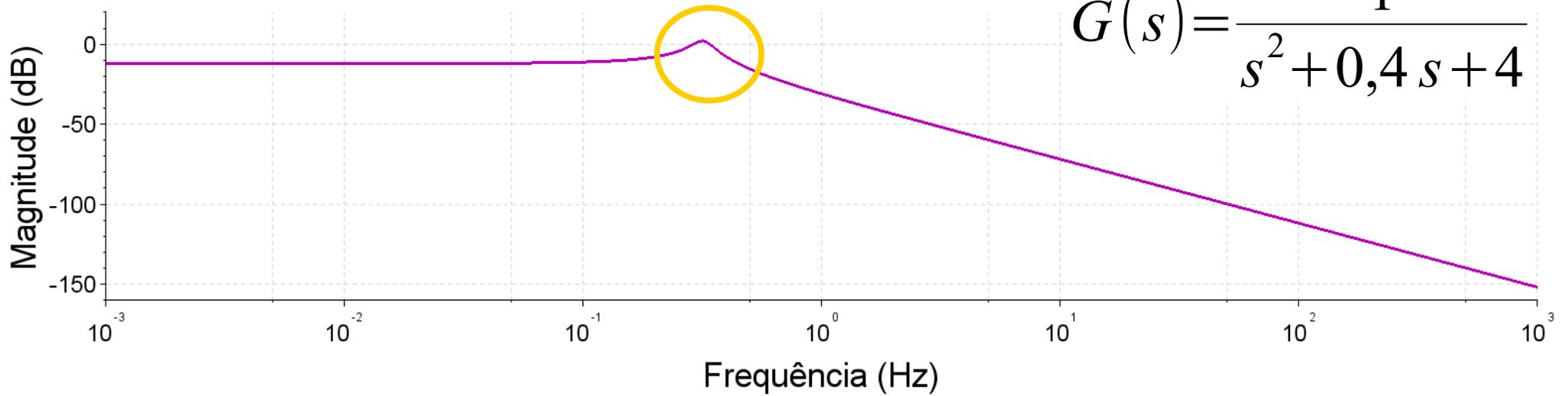
- Sinal rápido  $\Rightarrow$  frequência elevada
- Quanto menor a frequência de corte, mais lento é o sinal
- Picos:
  - Polos reais  $\Rightarrow$  ausência de pico
  - Quanto maior o amortecimento, menor é o pico
  - Em sistemas de ordem elevada, os picos indicam polos pouco amortecidos

# Diagrama de Bode

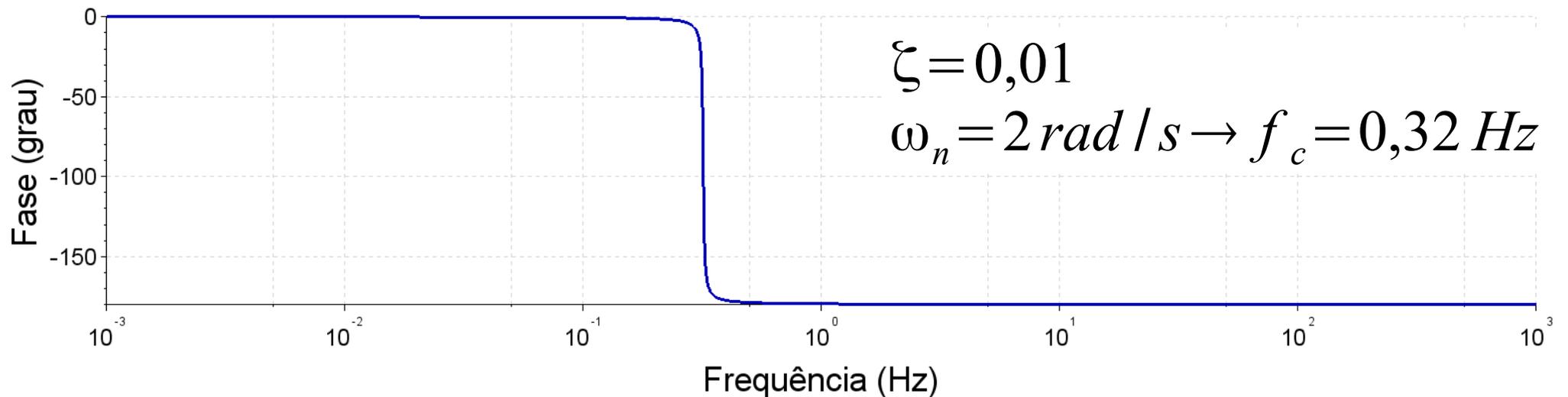
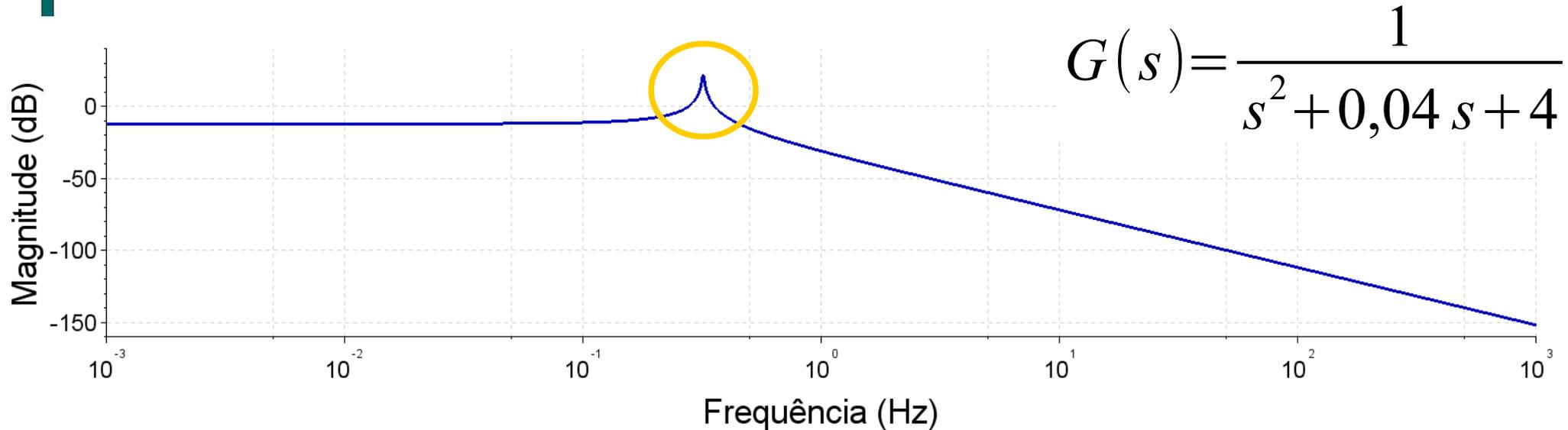
- Ruído: componentes em altas frequências
  - Sistema com resposta rápida → banda passante larga → filtra pouco o ruído
  - Sistema com resposta lenta → banda passante estreita → filtra melhor o ruído

# Diagrama de Bode

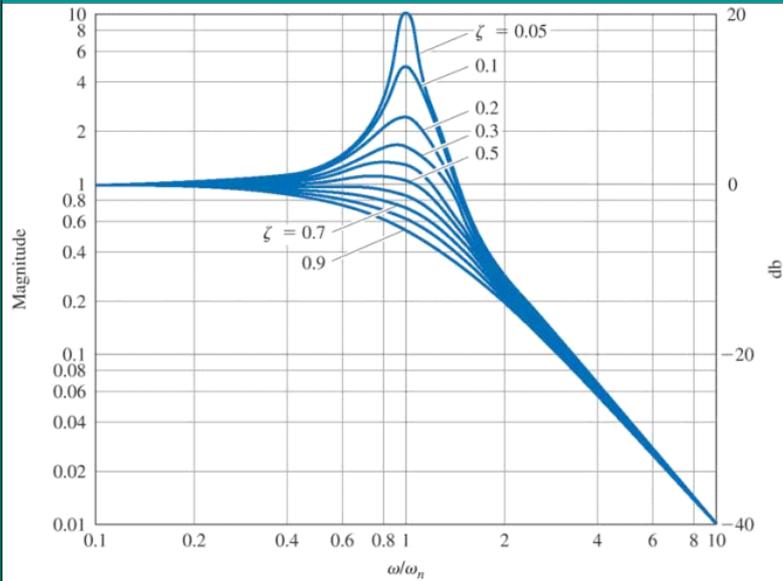
$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0,4s + 4}$$



# Diagrama de Bode

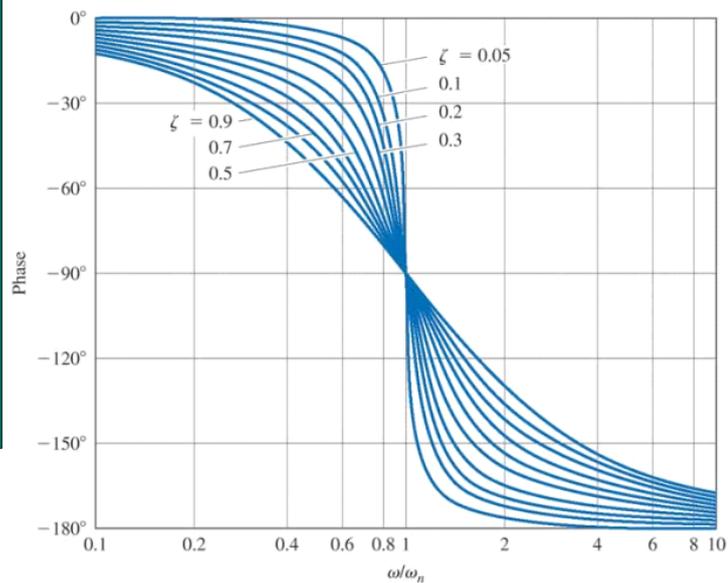


# Diagrama de Bode



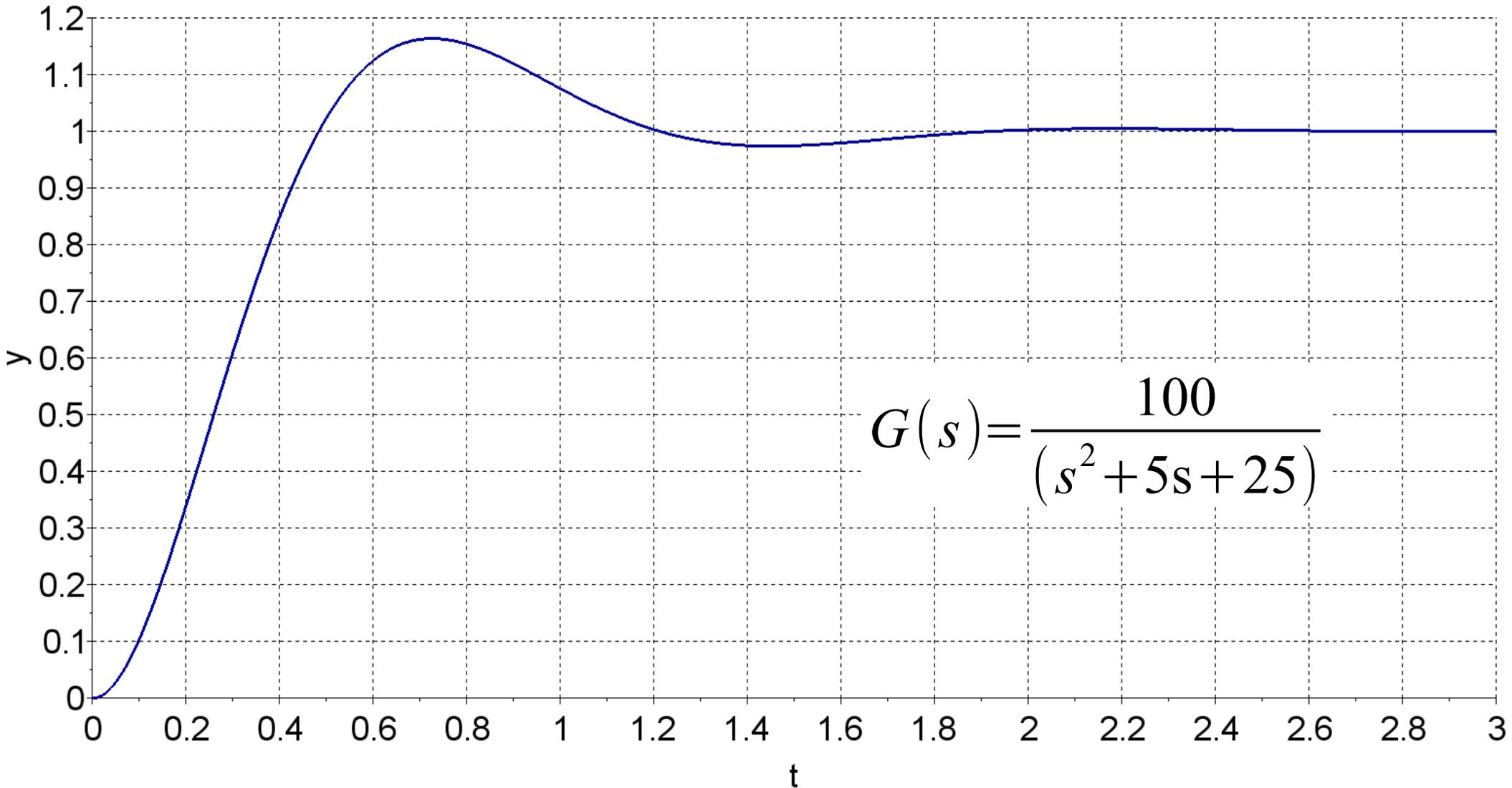
(a)

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1}$$

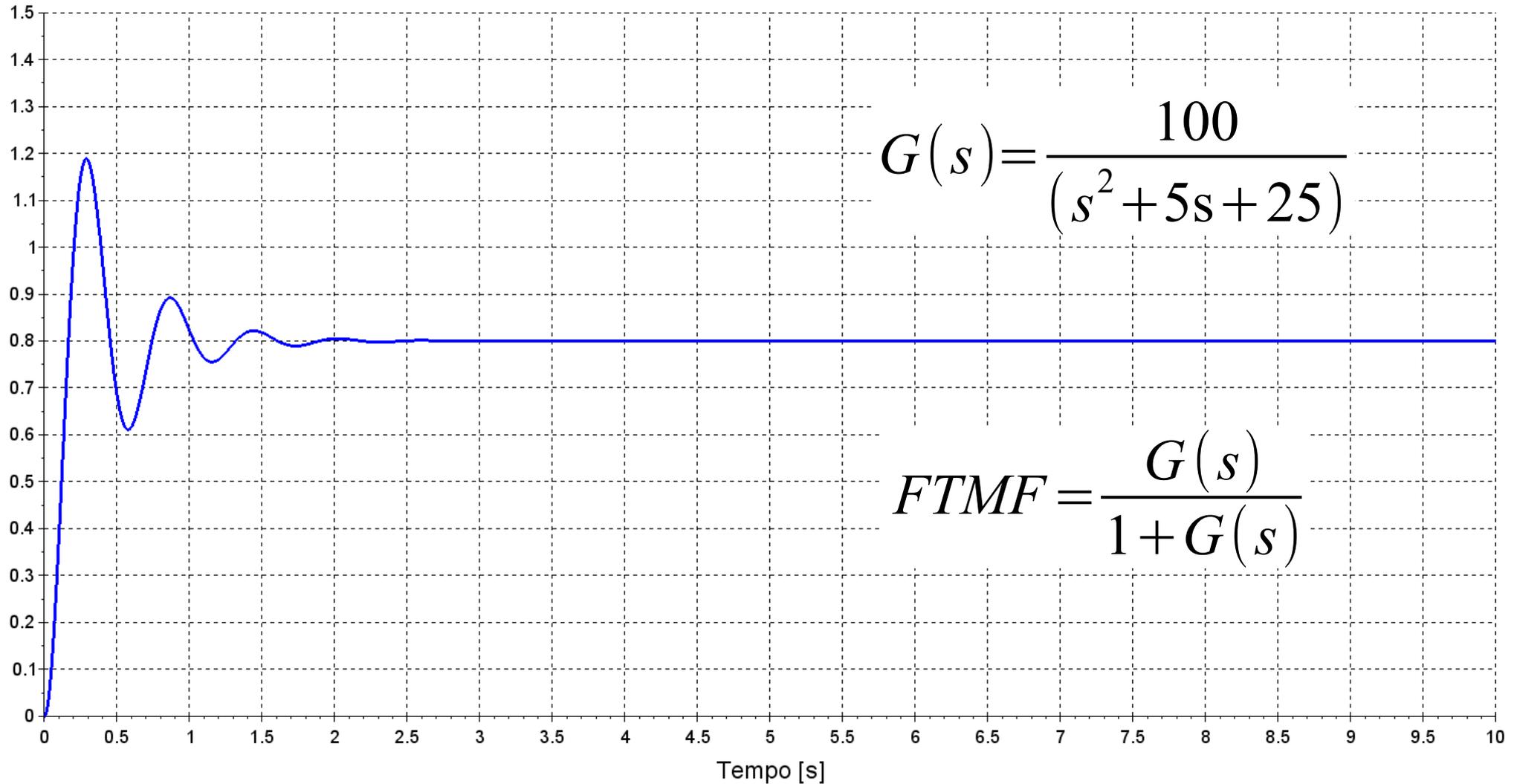


(b)

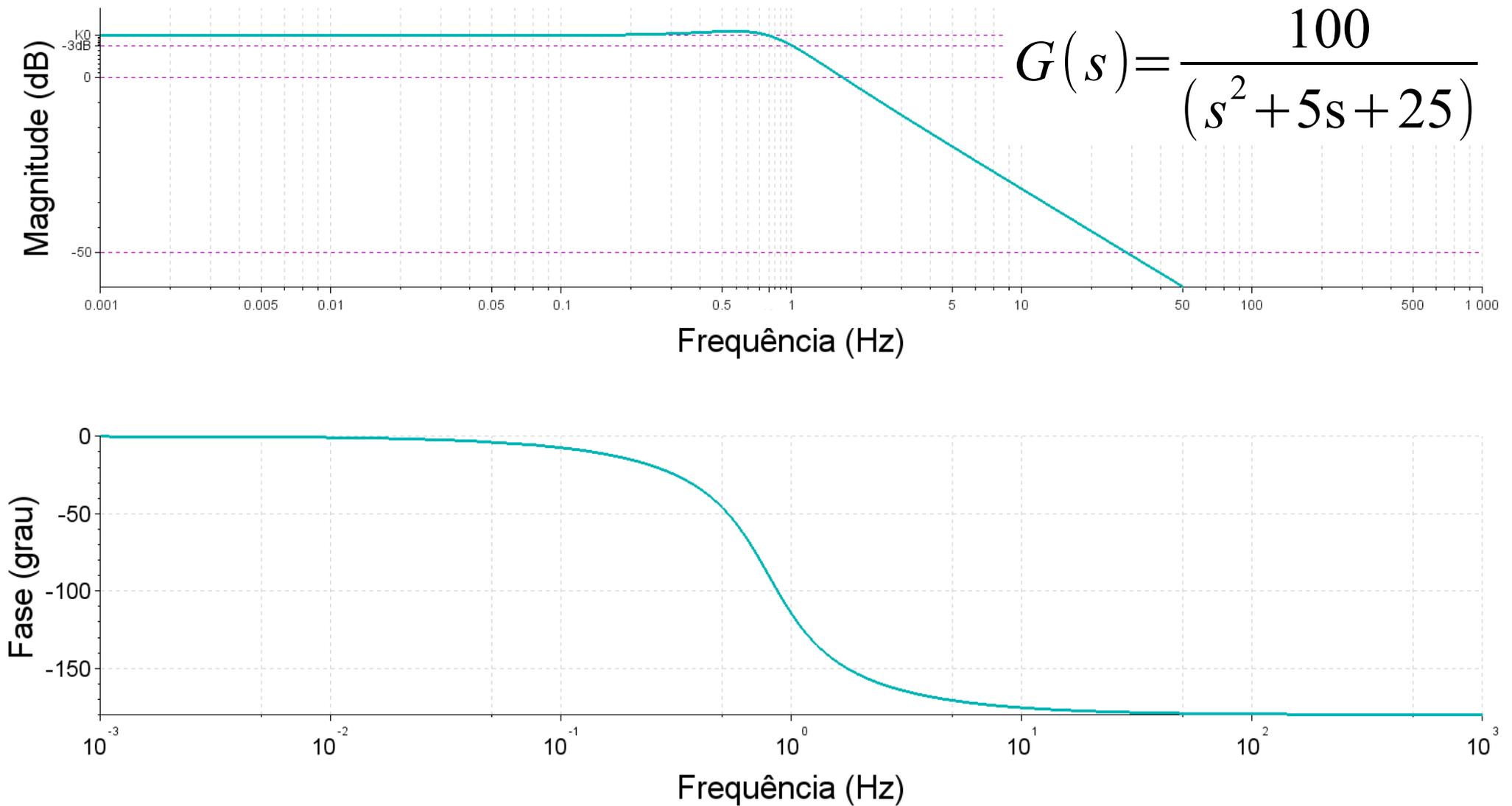
# Diagrama de Bode



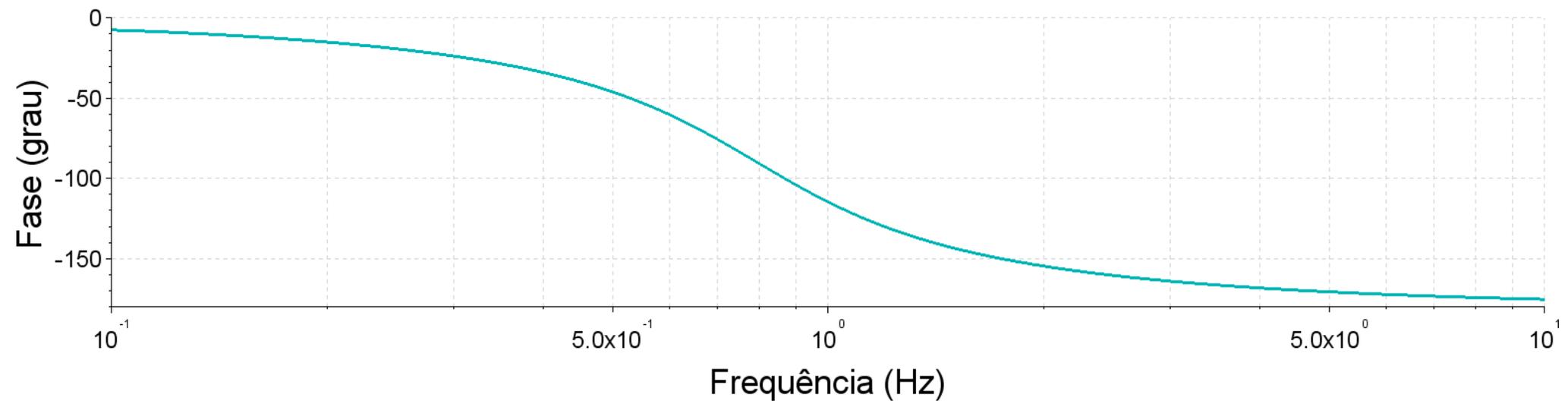
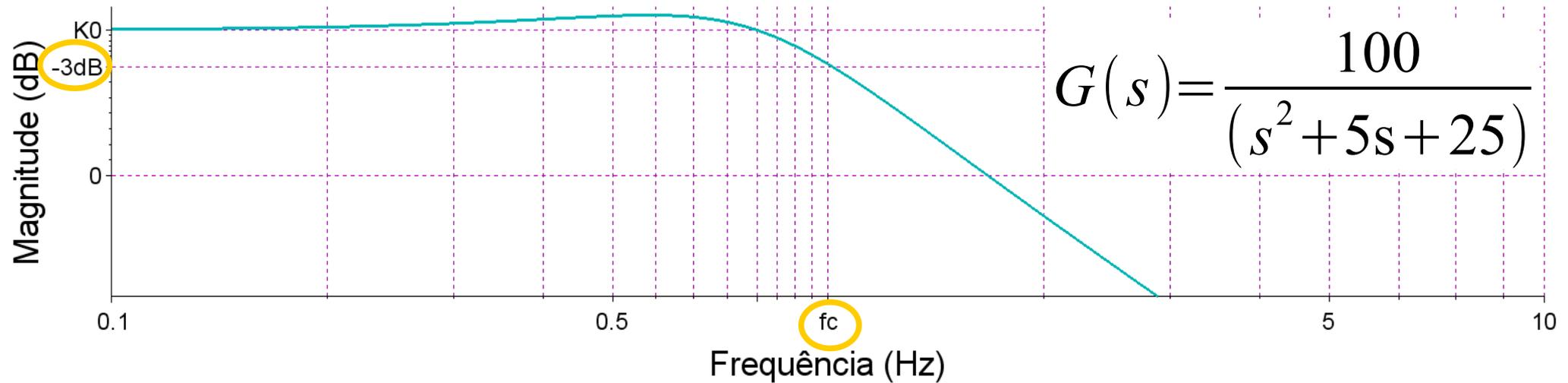
# Diagrama de Bode



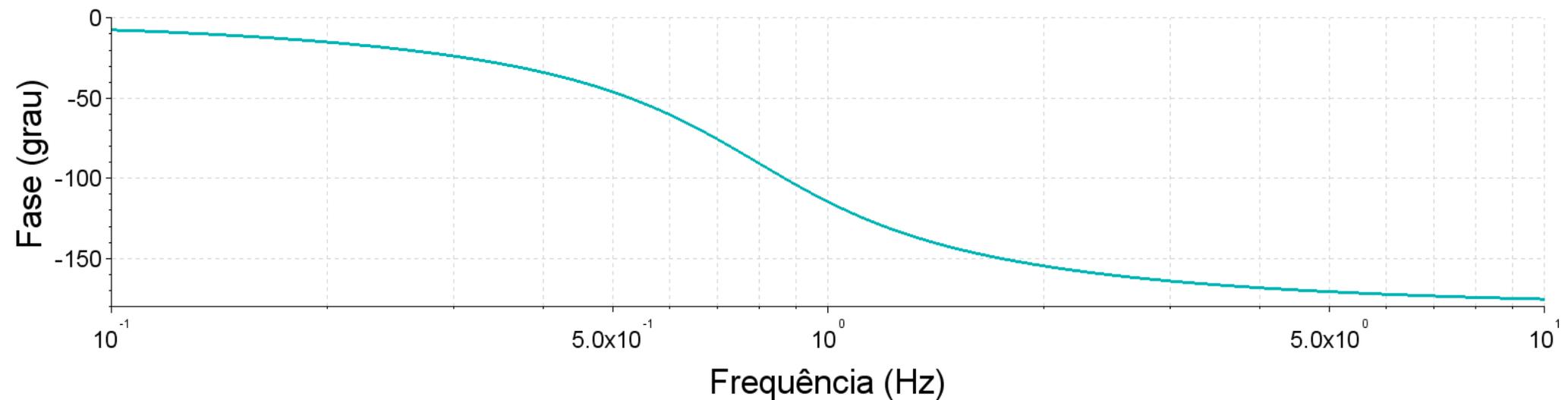
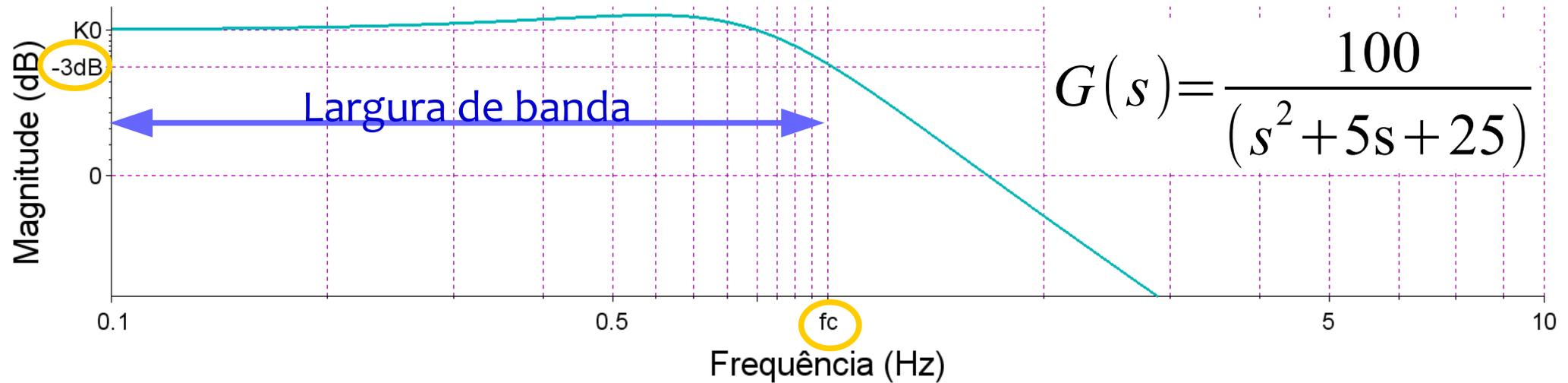
# Diagrama de Bode



# Diagrama de Bode

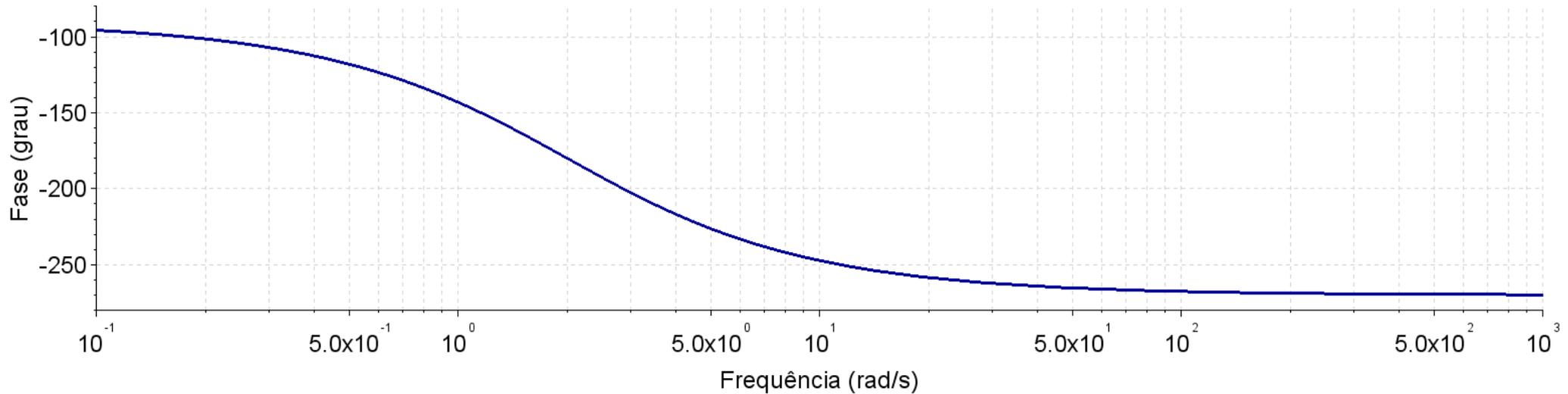
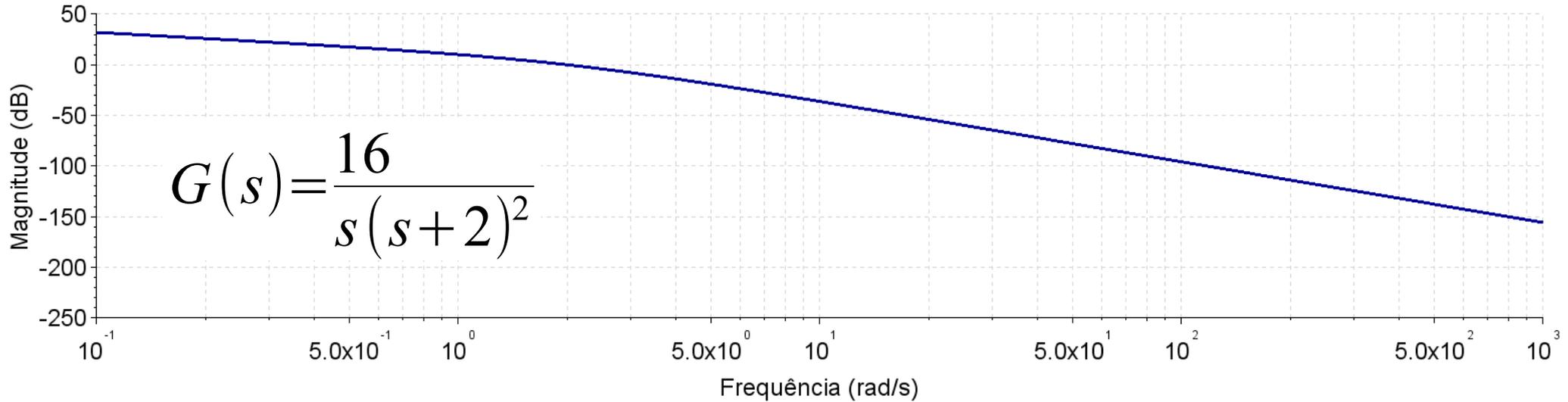


# Diagrama de Bode



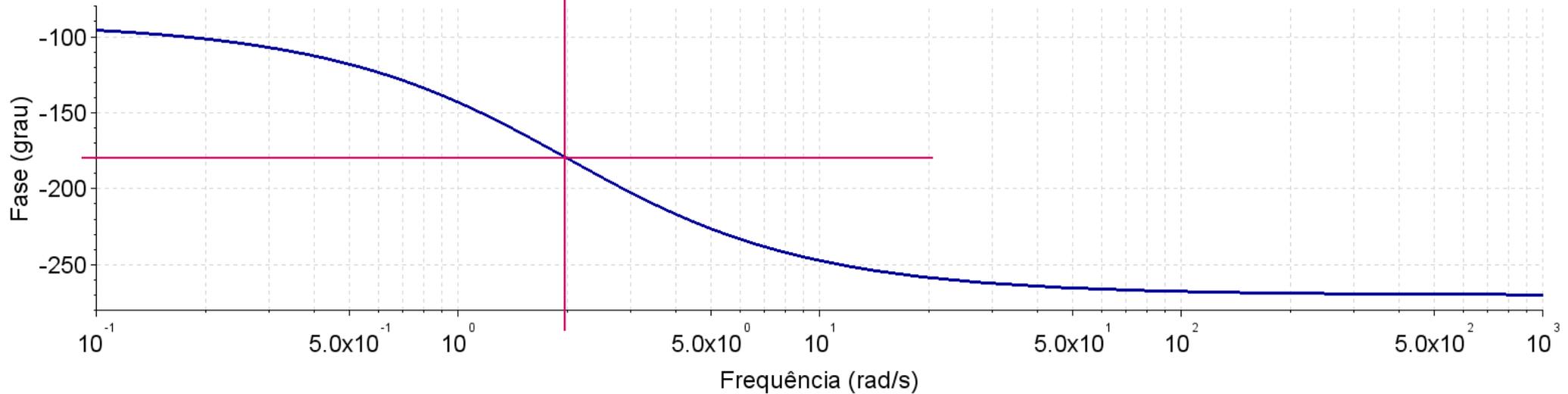
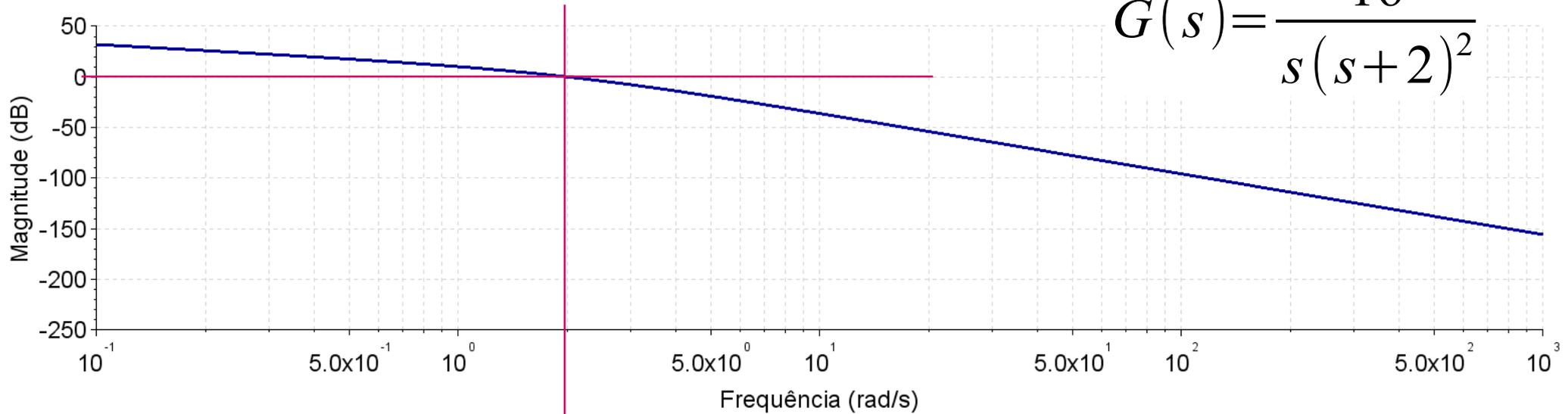
# Estabilidade

$$G(s) = \frac{16}{s(s+2)^2}$$

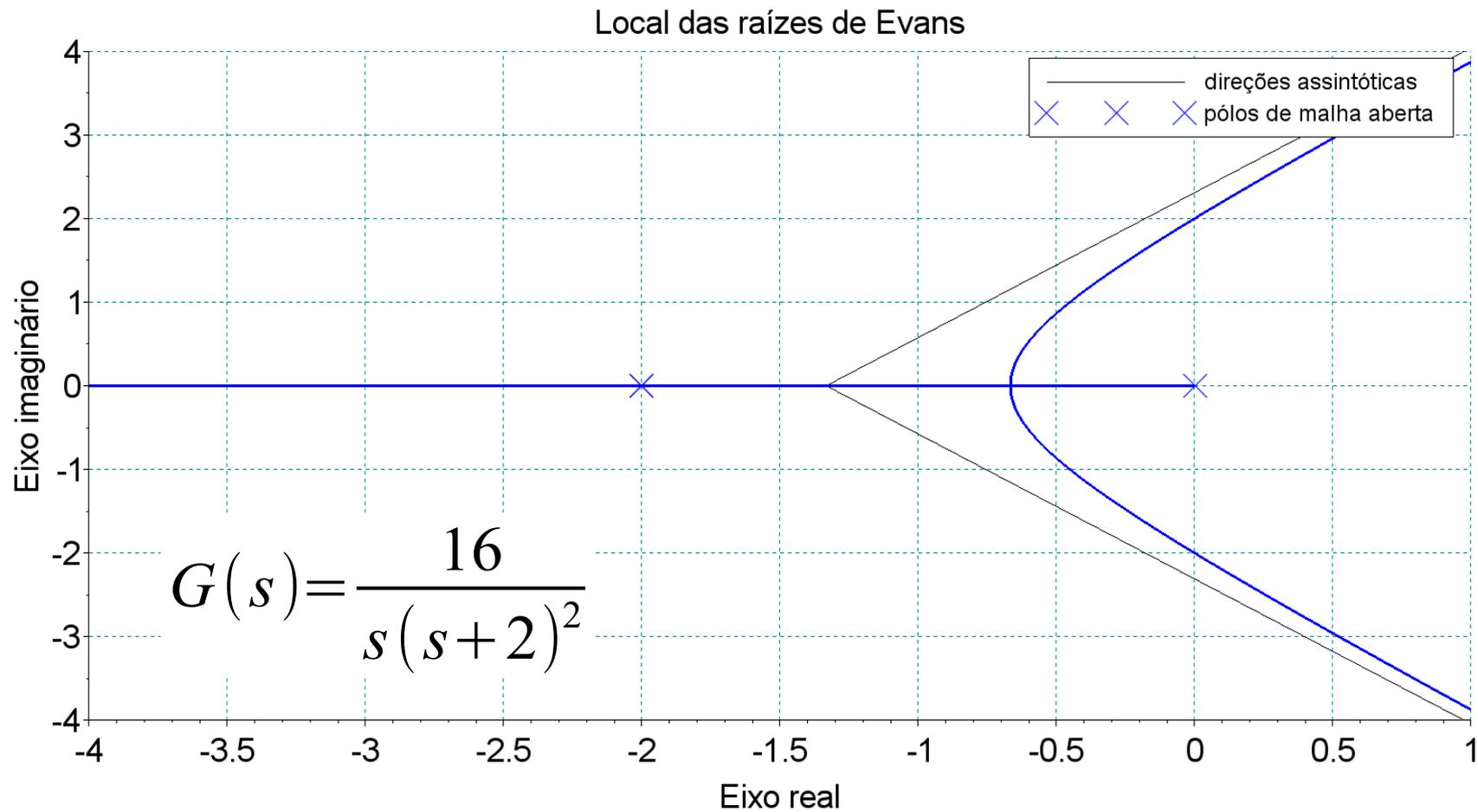


# Estabilidade

$$G(s) = \frac{16}{s(s+2)^2}$$

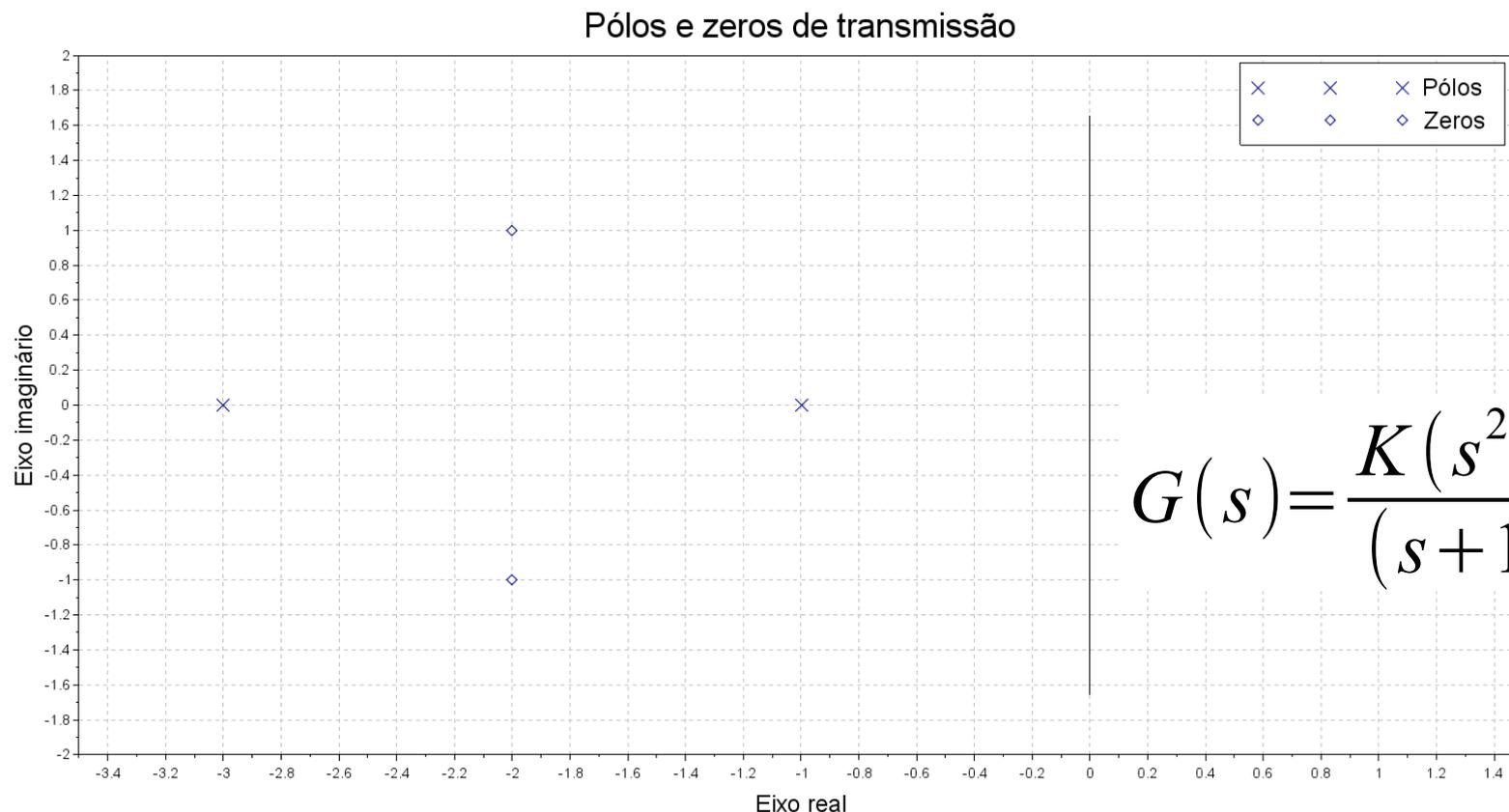


# Estabilidade



# Critério de estabilidade de Nyquist

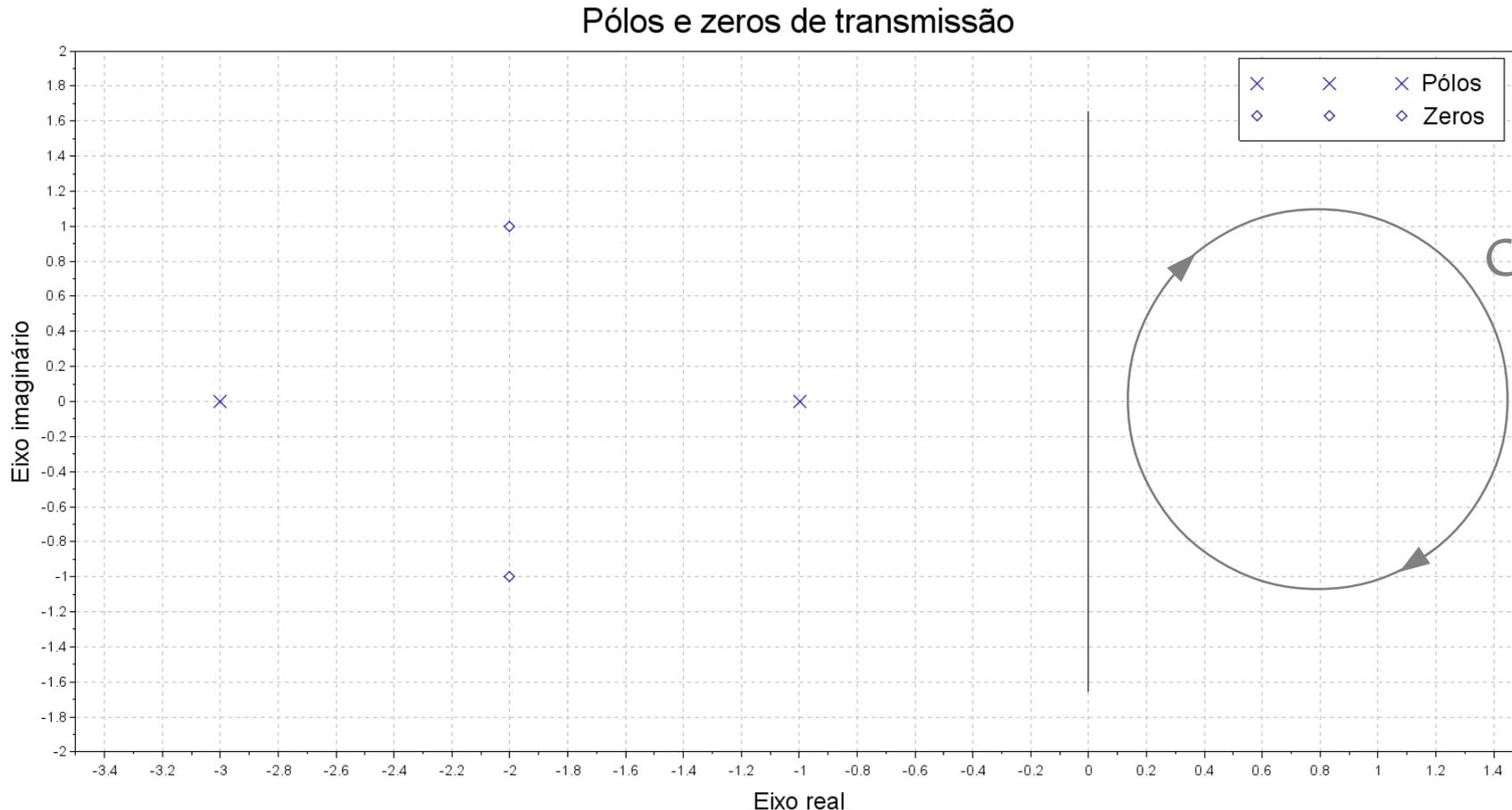
- Baseado no princípio do argumento de Cauchy
- Seja a planta representada pela função de transferência cujos polos e zeros são os seguintes:



$$G(s) = \frac{K(s^2 + 4s + 5)}{(s + 1)(s + 3)}$$

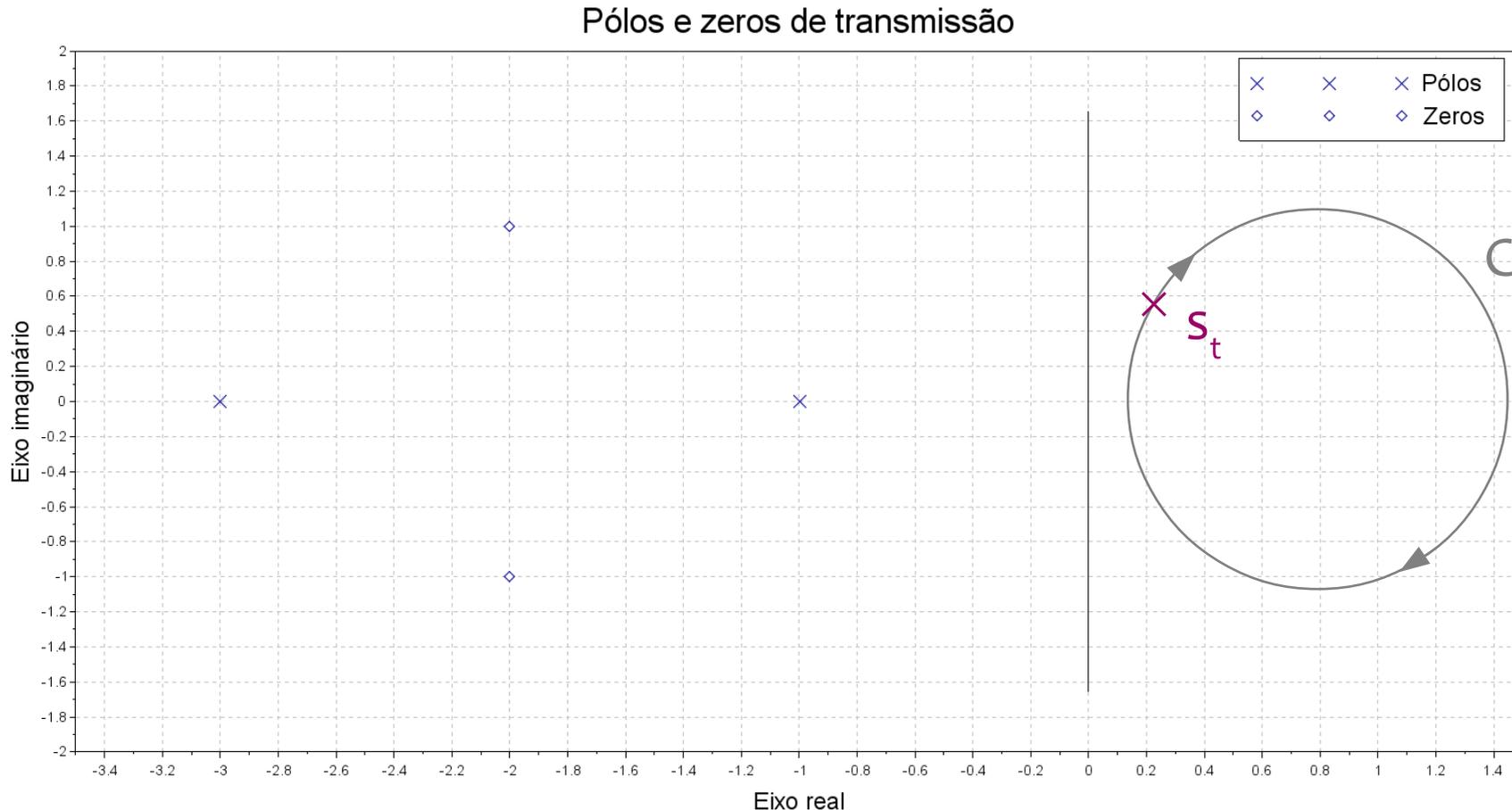
# Critério de estabilidade de Nyquist

- Desejamos avaliar  $G(s)$  para os valores de  $s$  que pertencem ao contorno  $C$ .



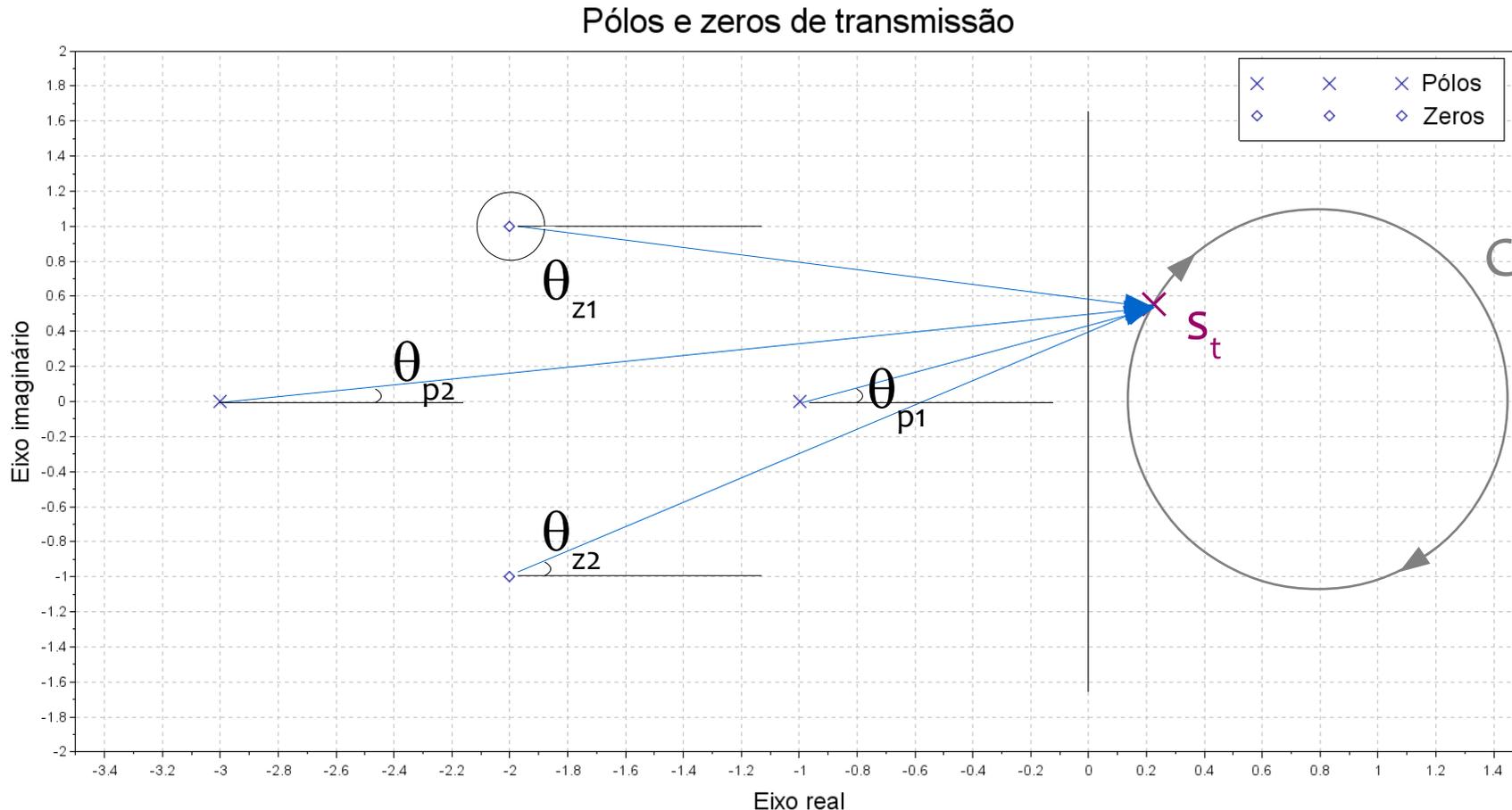
# Critério de estabilidade de Nyquist

- Desejamos avaliar  $G(s)$  para os valores de  $s$  que pertencem ao contorno  $C$ .



# Critério de estabilidade de Nyquist

- Desejamos avaliar  $G(s)$  para os valores de  $s$  que pertencem ao contorno  $C$ .



# Critério de estabilidade de Nyquist

- Desejamos avaliar  $G(s)$  para os valores de  $s$  que pertencem ao contorno  $C$ .

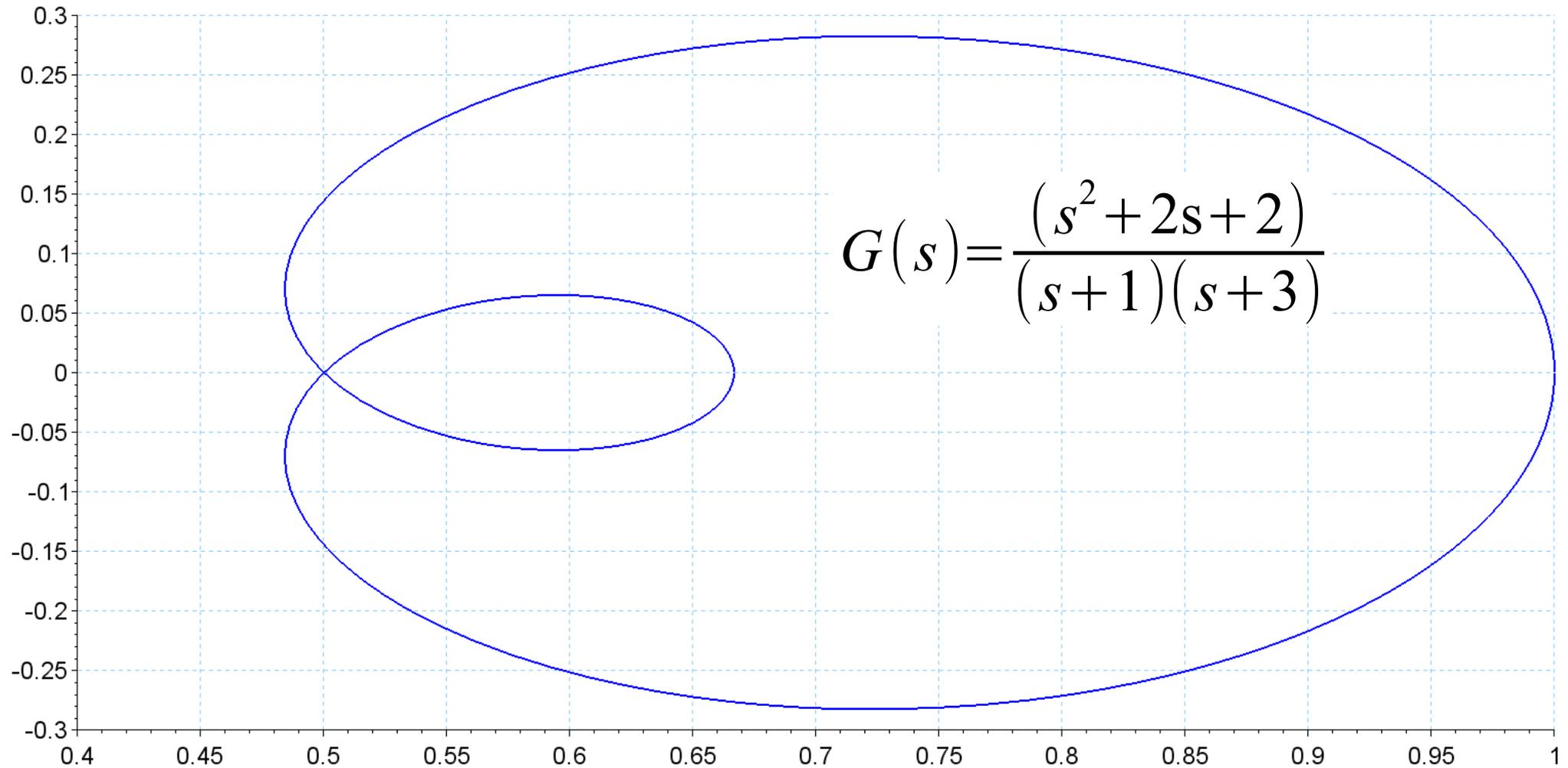
$$\angle G_1(s_t) = \alpha = \theta_{z1} + \theta_{z2} - \theta_{p1} - \theta_{p2}$$

- Se o contorno envolvesse a origem, isto resultaria numa variação angular de  $360^\circ$  da função de transferência.
- Neste caso, isso não ocorre, já que o vetor que parte da origem e chega até os diferentes pontos que compõem o contorno  $C$  não completa nenhuma volta em torno da origem.

# Critério de estabilidade de Nyquist

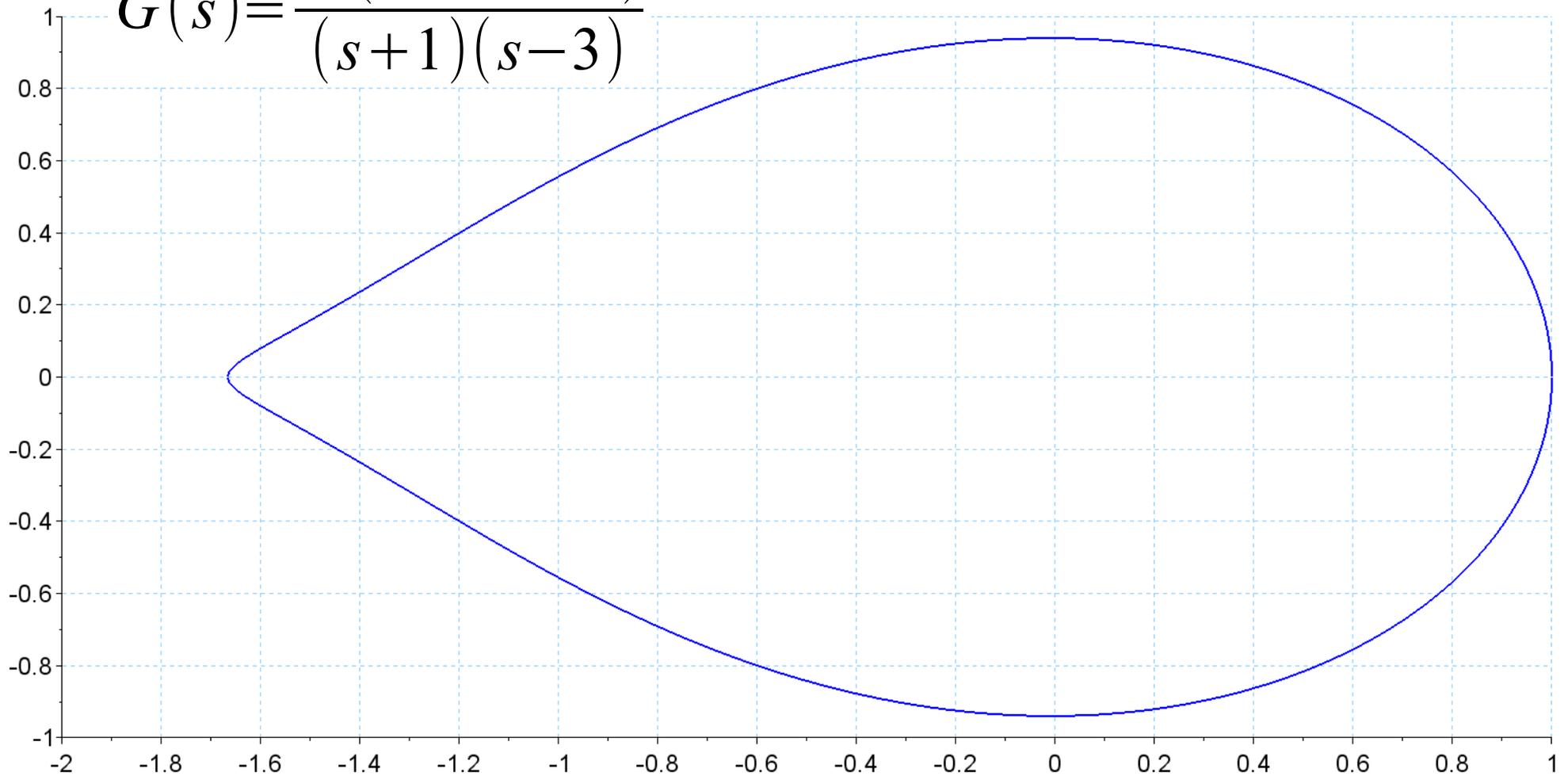
- Um ponto é dito ser **circundado** por um caminho fechado se ele estiver **dentro do caminho**.
- Um ponto ou região é dito ser **envolvido** por um caminho fechado se ele se encontrar **à esquerda do caminho** quando este é percorrido no sentido indicado.

# Critério de estabilidade de Nyquist



# Critério de estabilidade de Nyquist

$$G(s) = \frac{K(s^2 + 4s + 5)}{(s+1)(s-3)}$$



# Critério de estabilidade de Nyquist

- Princípio do argumento:

O mapa de contorno de uma função complexa envolve a origem  $Z - P$  vezes, em que  $Z$  é o número de zeros e  $P$ , o número de polos dentro do contorno.

# Critério de estabilidade de Nyquist

- Um contorno  $C_1$  no sentido horário que envolva um **zero** de  $1 + KG(s)$  resulta em  $KG(s)$  envolvendo o ponto  $-1$  no sentido **horário**.
- Da mesma forma, se  $C_1$  envolve um **polo** de  $1 + KG(s)$ ,  $KG(s)$  envolverá o ponto  $-1$  no sentido **anti-horário**.

# Critério de estabilidade de Nyquist

- O número  $N$  de envoltimentos é igual ao número  $Z$  de zeros de  $1 + KG(s)$  (ou de polos de malha fechada) no semiplano direito, menos o número  $P$  de polos de malha aberta no semiplano direito.

$$N = Z - P$$

# Critério de estabilidade de Nyquist

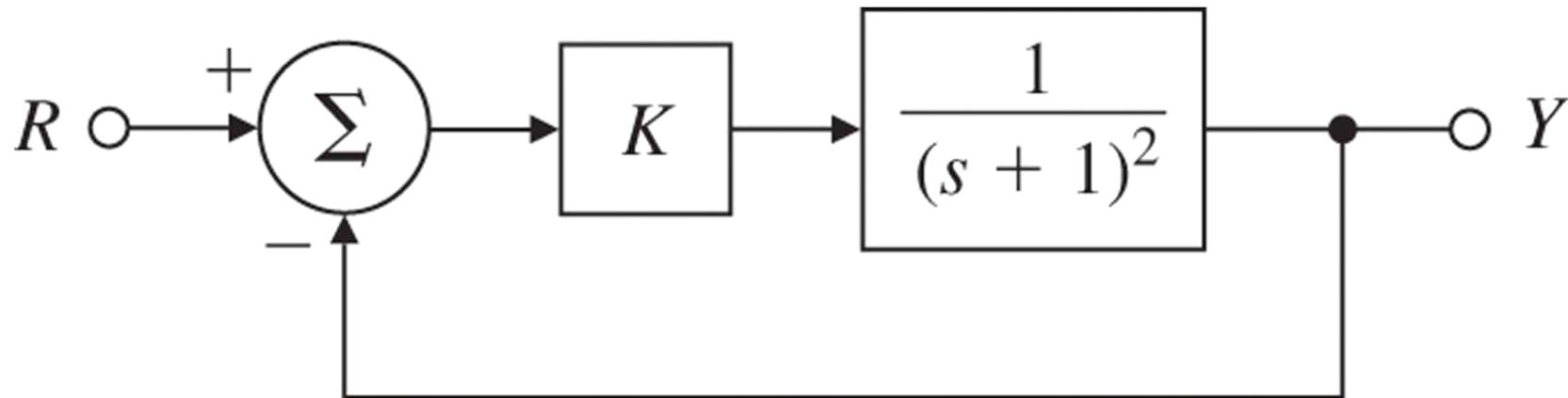
- 1) **Traçar o diagrama polar** de  $KG(j\omega)$  para  $0 \leq \omega < \infty$  .  
Refletir o diagrama em relação ao eixo real, o que resultará na parte do diagrama relativa a  $-\infty < \omega \leq 0$  .
- 2) Determinar  $P$ , que é o número de **polos instáveis de malha aberta**.

# Critério de estabilidade de Nyquist

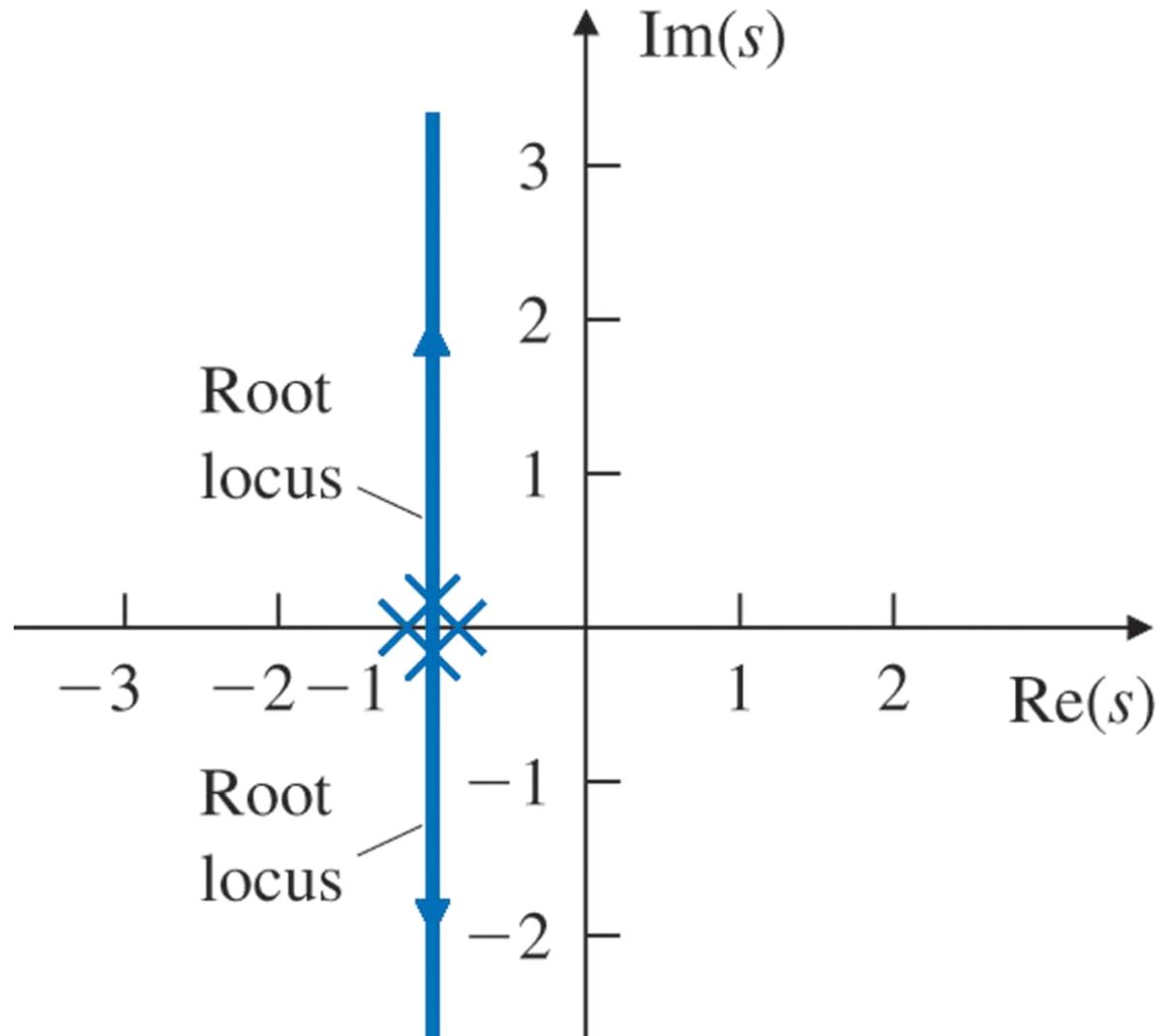
- 3) Determinar  $N$ , que é o número de envolvimentos do ponto  $-1$  pelo mapeamento de  $KG(j\omega)$ . Para isso, traçar um vetor que parte de  $-1$  e chega no infinito. Levar em conta o sentido dos envolvimentos:
- Sentido horário:  $N$  positivo
  - Sentido anti-horário:  $N$  negativo
- 4) Calcular o número de polos instáveis de malha fechada  $Z$ :

$$Z = N + P$$

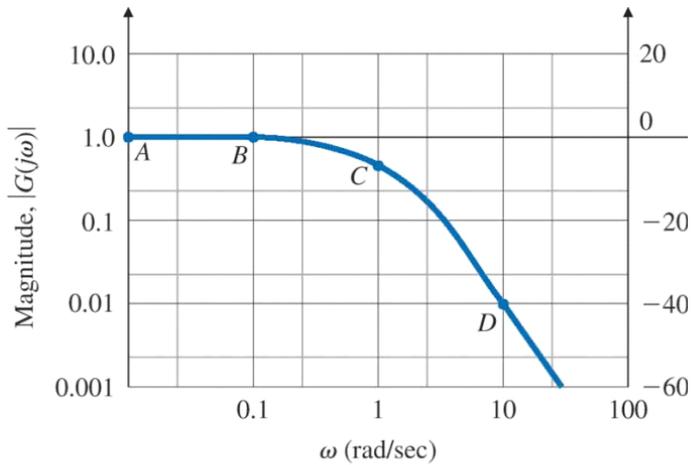
# Exemplo 1



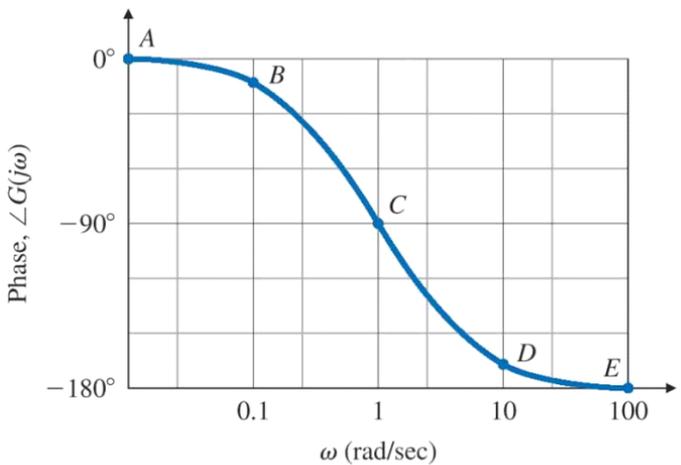
# Exemplo 1



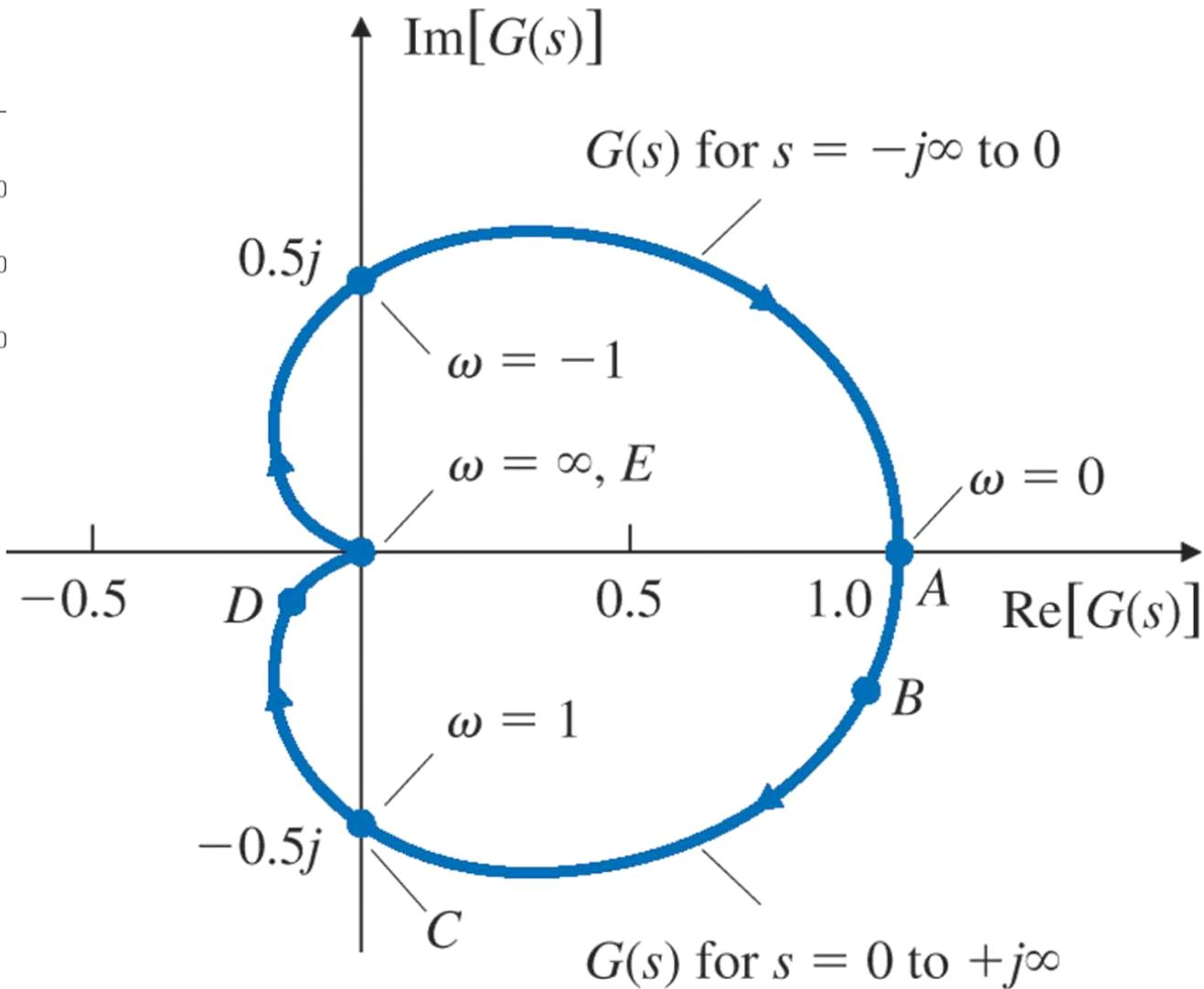
# Exemplo 1



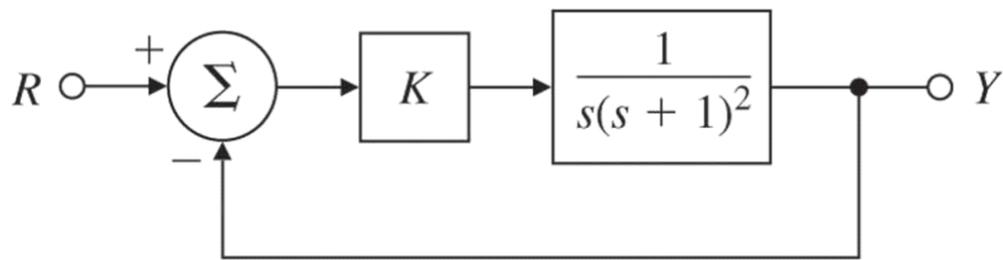
(a)



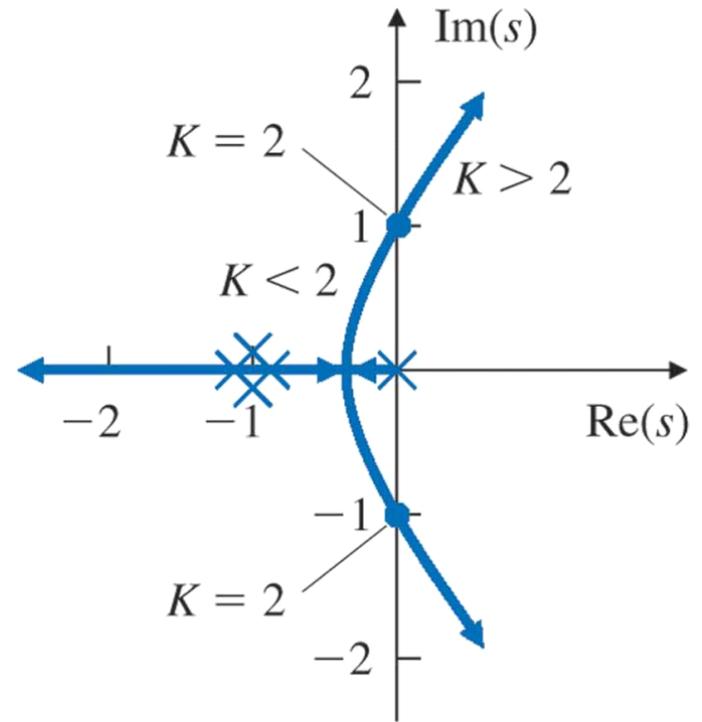
(b)



# Exemplo 2

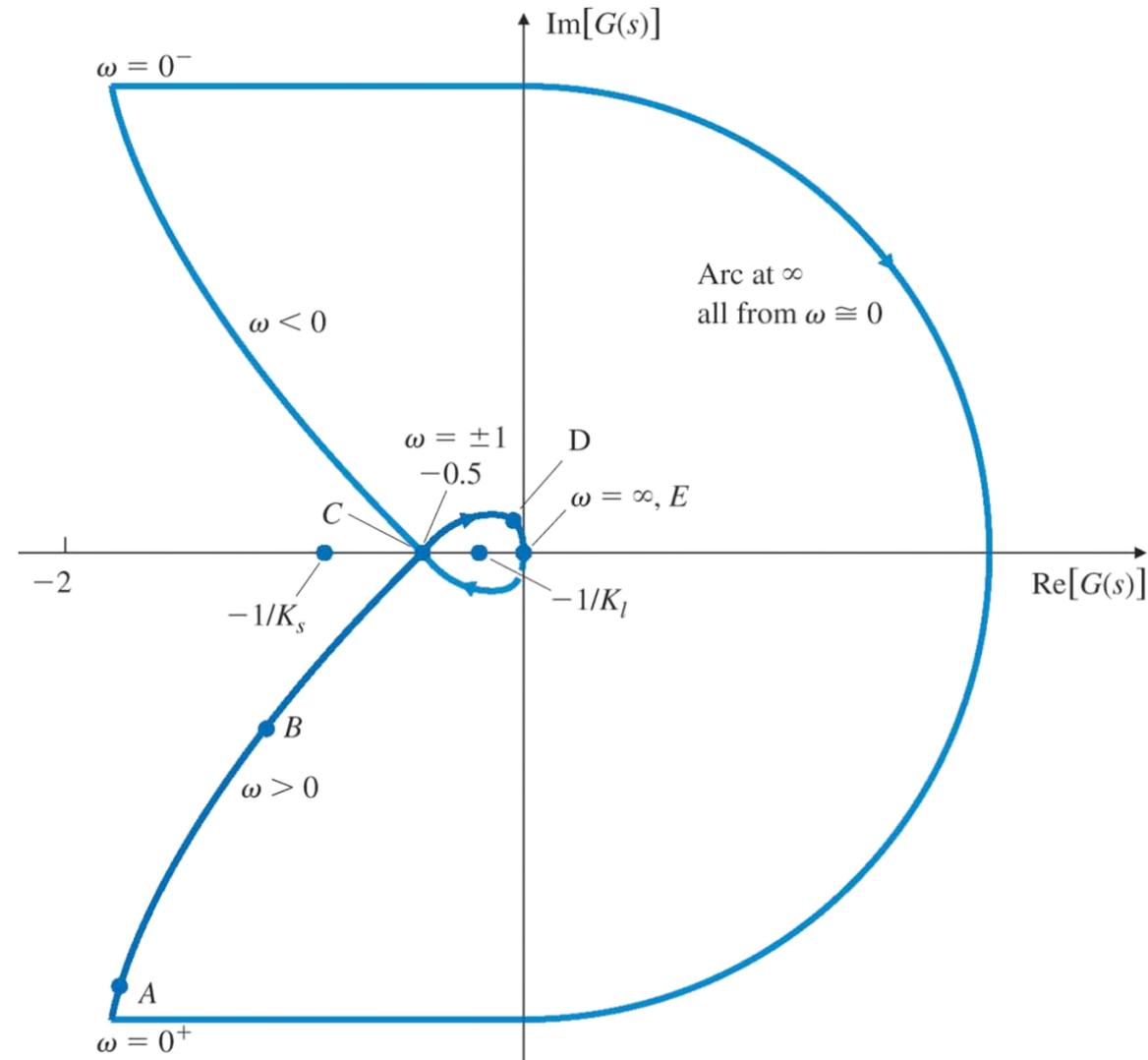
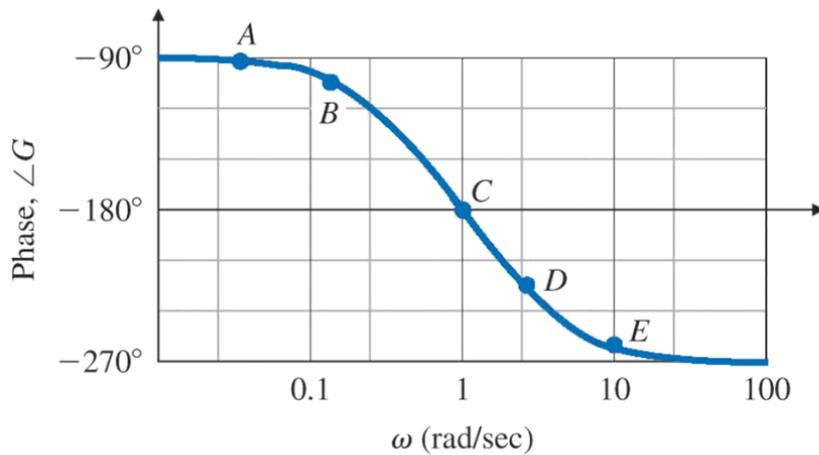
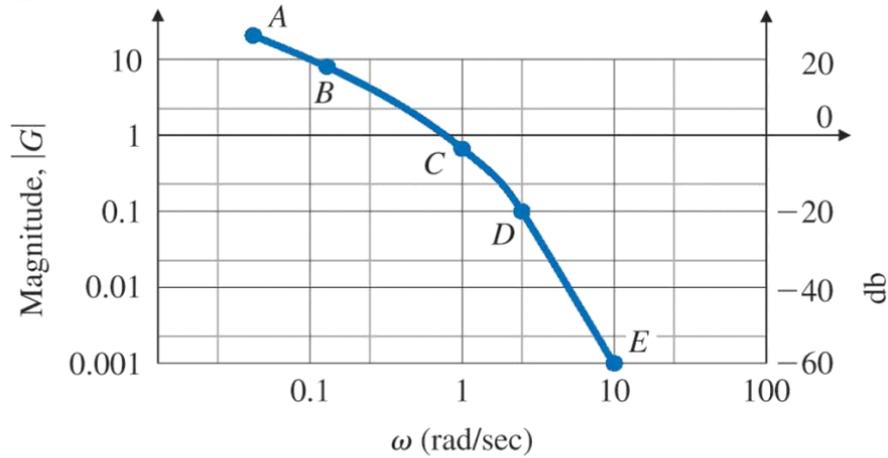


(a)

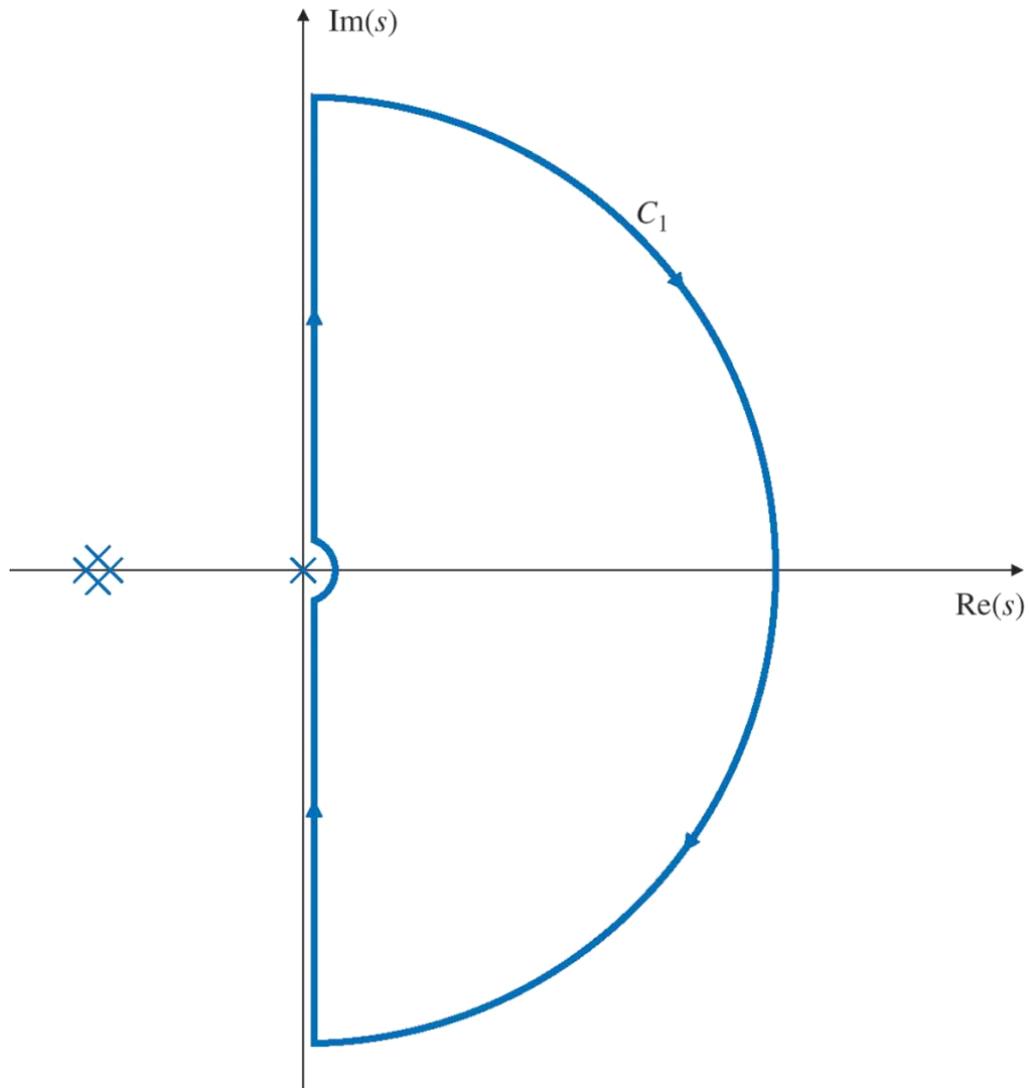


(b)

# Exemplo 2



# Exemplo 2



Juliana lamamura