



Controle e Servomecanismo

TE240

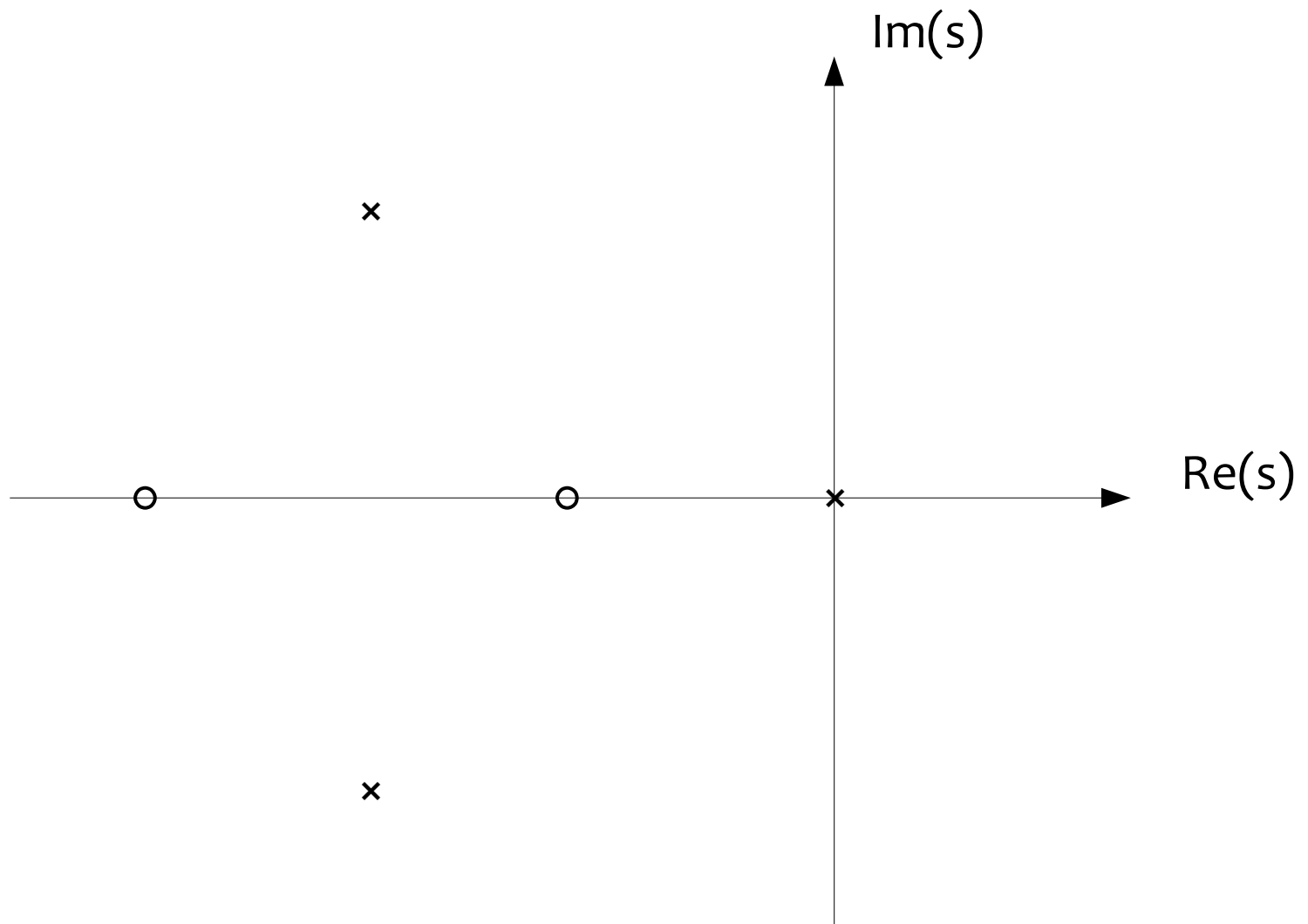
Lugar das raízes

Juliana L. M. lamamura

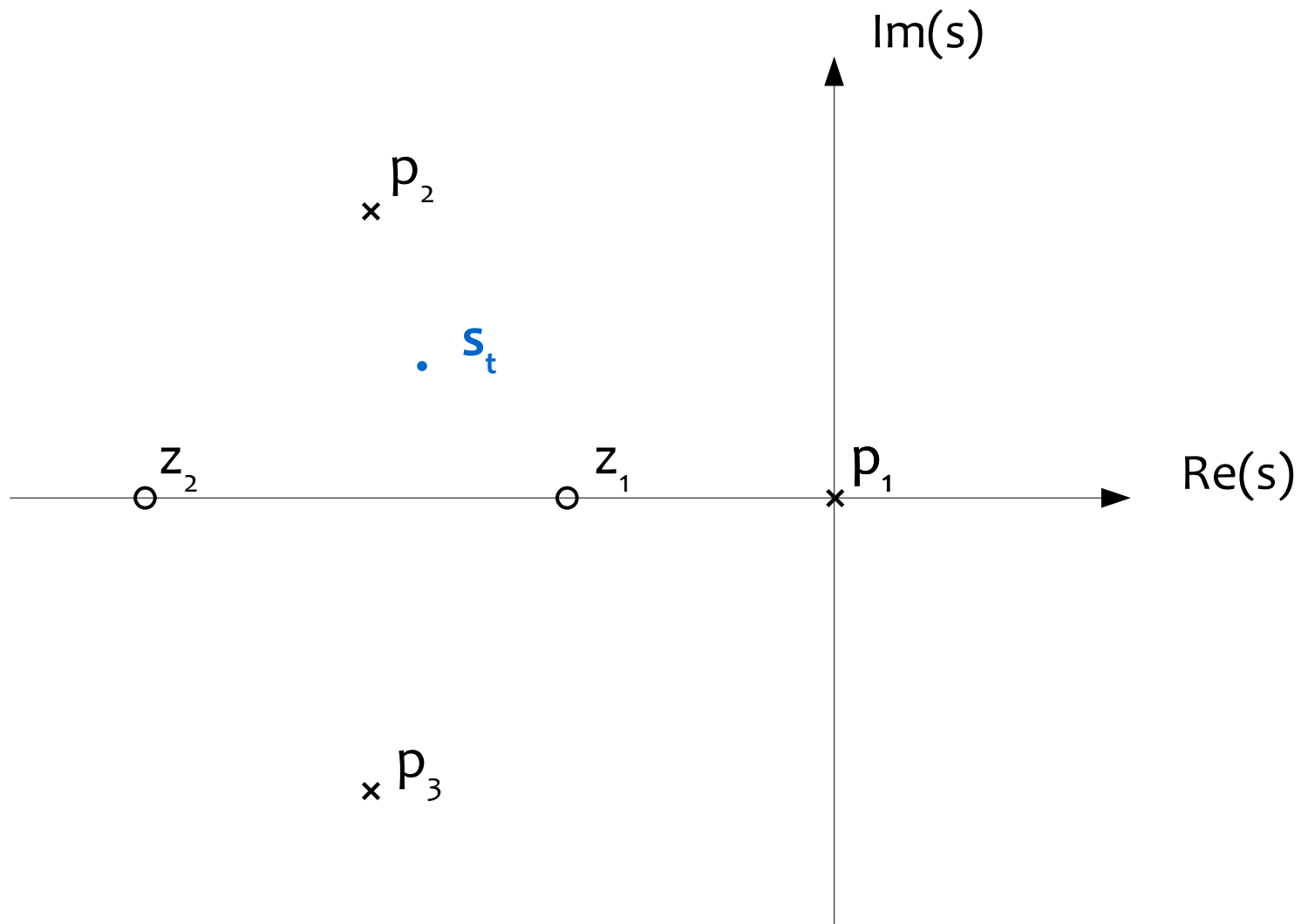
Lugar das raízes

- Método gráfico que representa o lugar das raízes no plano s ;
- Princípio: relação entre os polos da FTMF e o ganho e os polos e zeros da FTMA;
- Permite verificar a sensibilidade das raízes à variação de um parâmetro do sistema;
- Permite obter a solução exata e detalhada em regimes transitório e permanente;
- Se não há necessidade de uma solução exata, o LGR permite encontrar soluções aproximadas facilmente.

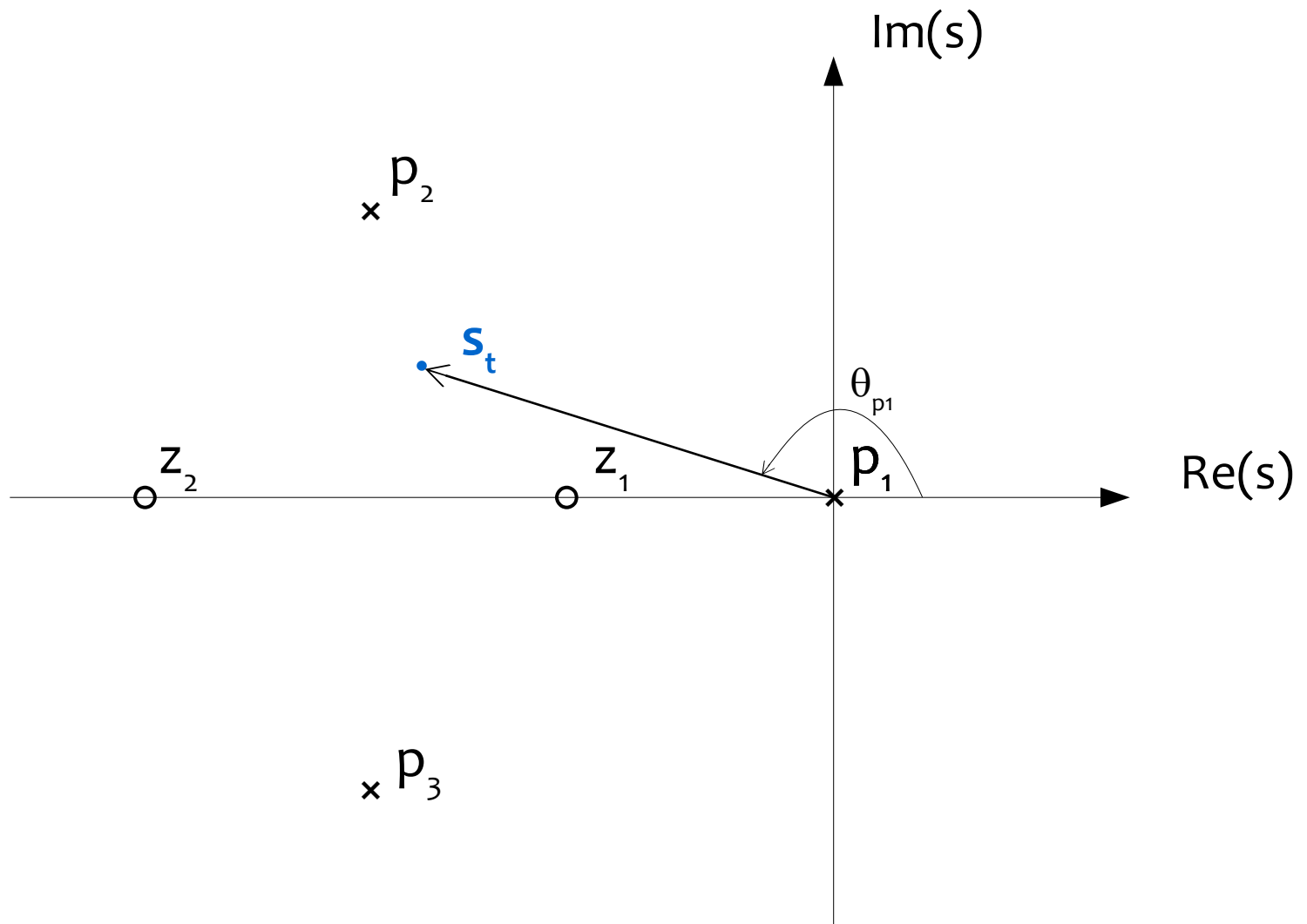
Lugar das raízes



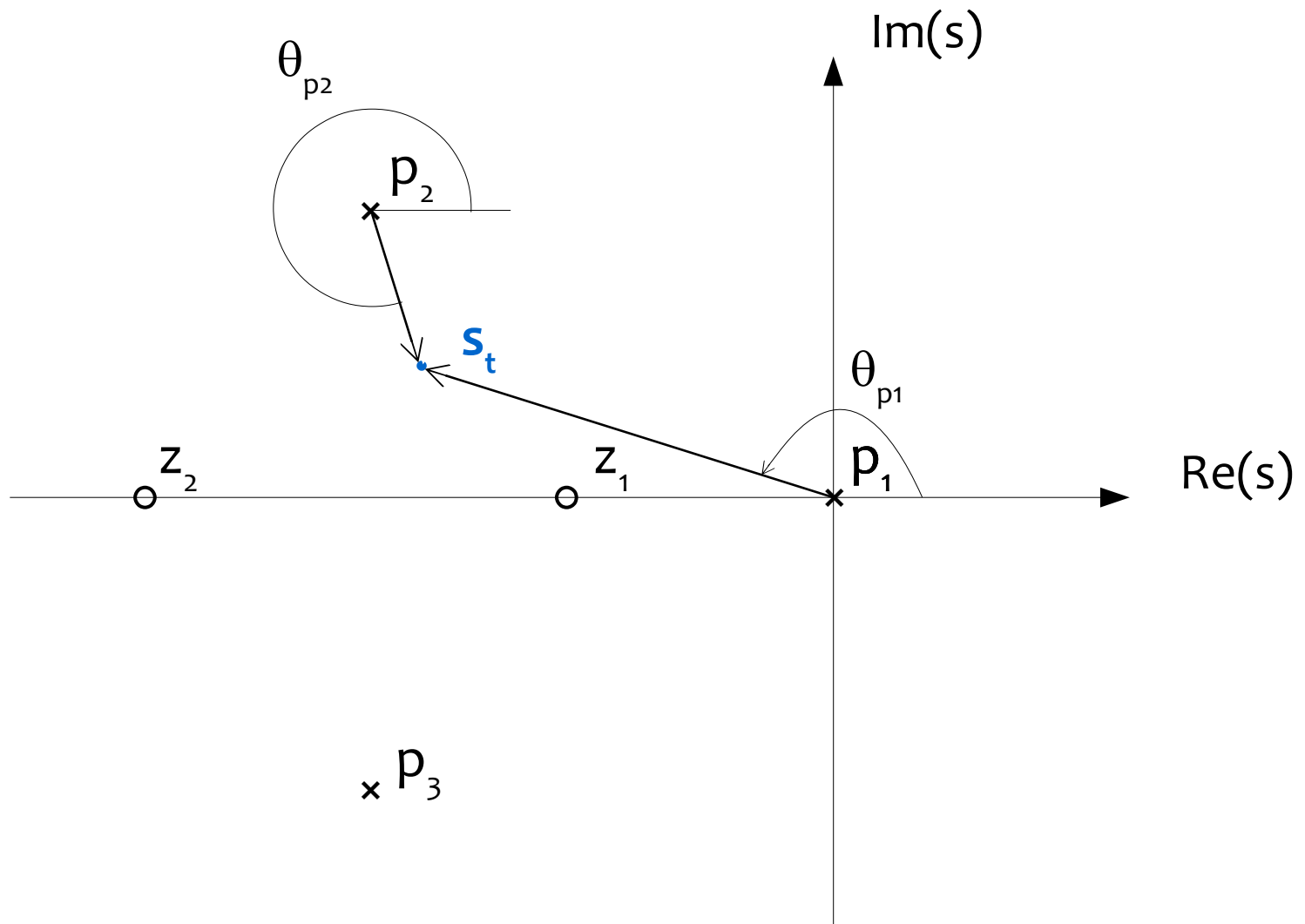
Lugar das raízes



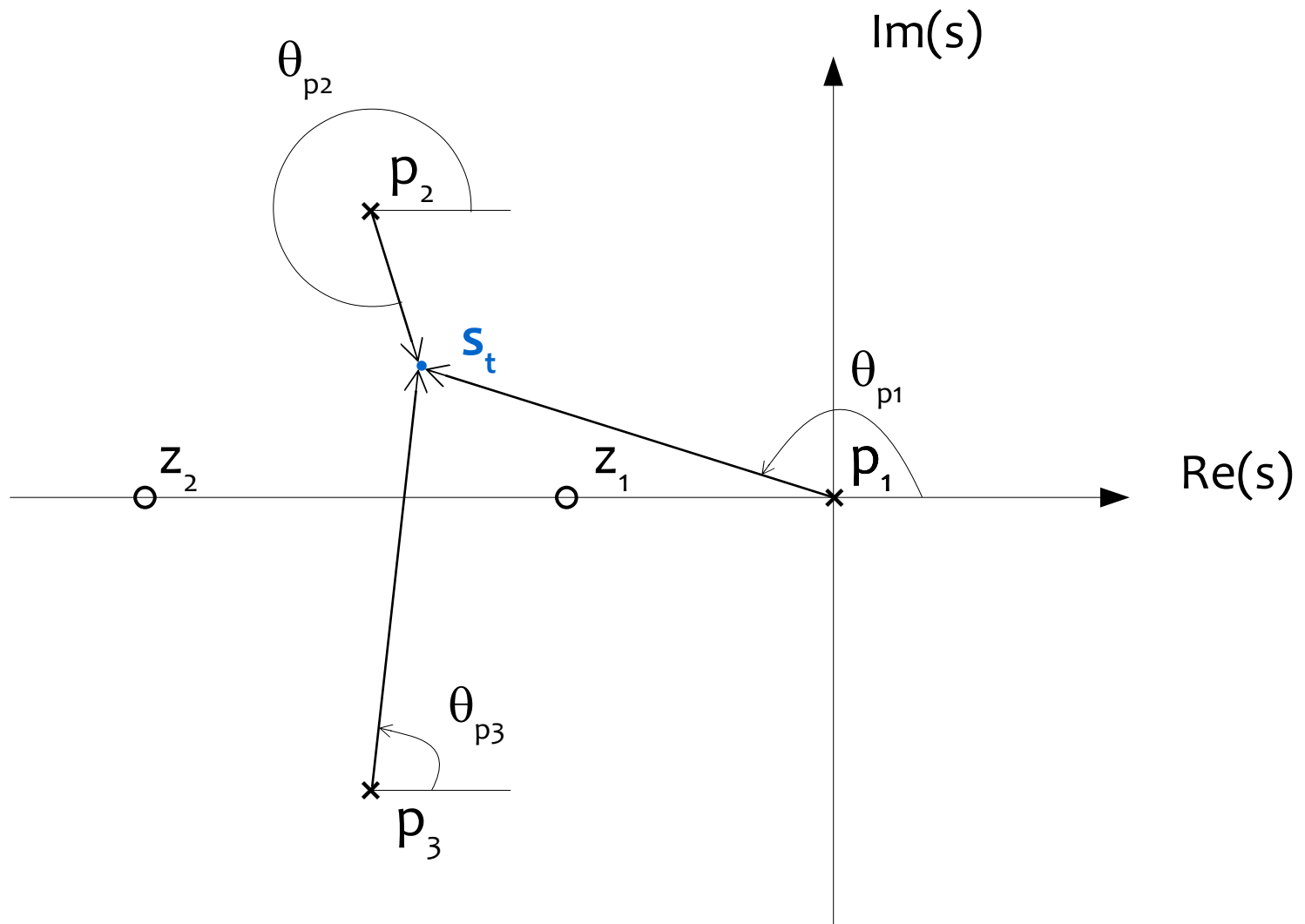
Lugar das raízes



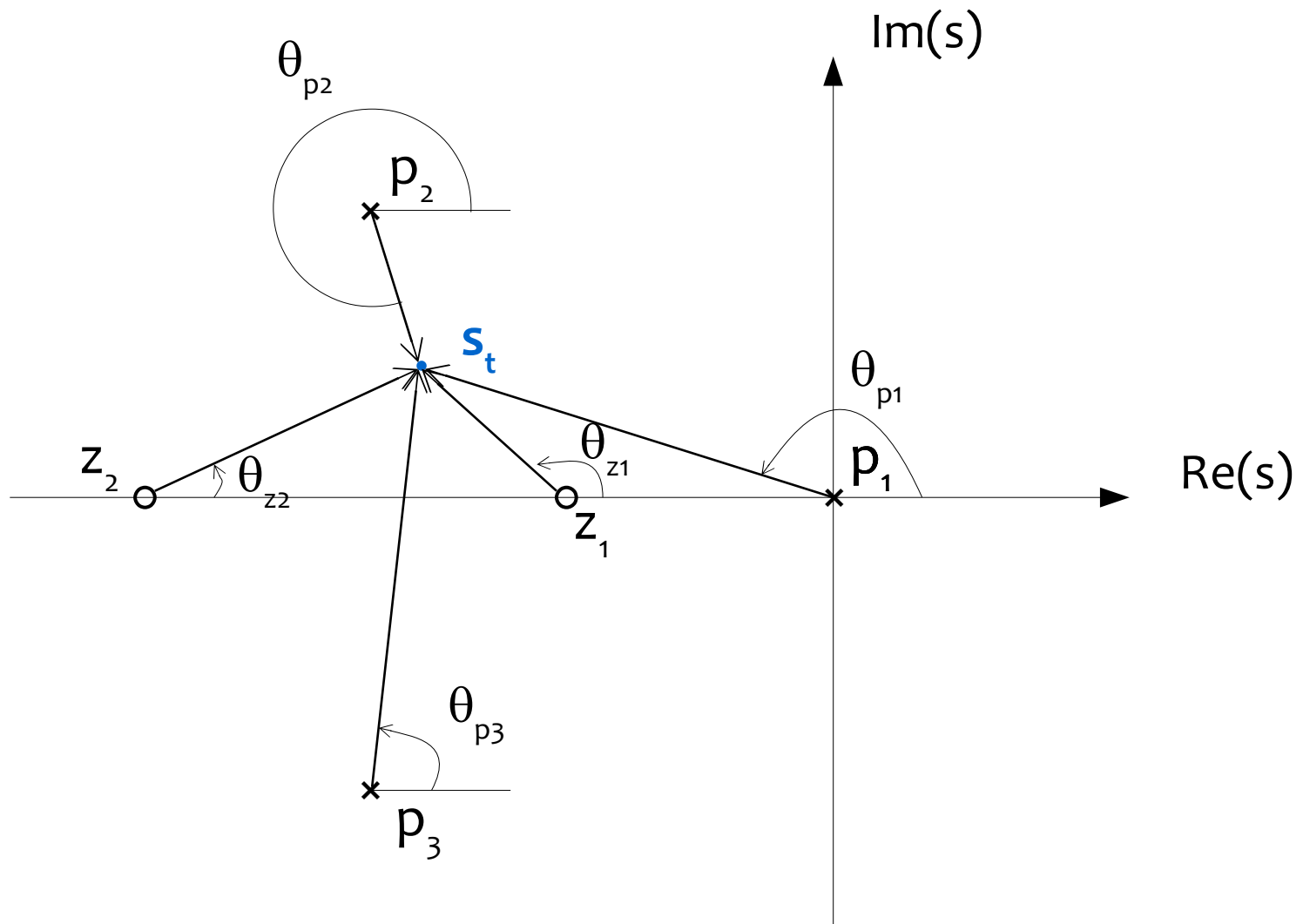
Lugar das raízes



Lugar das raízes



Lugar das raízes



Lugar das raízes

Condição de ângulo:

$$\theta_{z1} + \theta_{z2} - \theta_{p1} - \theta_{p2} - \theta_{p3} = \pm 180^\circ, \pm 540^\circ \dots$$

Condição de módulo:

$$|KG(s)| = 1$$

$$K = \frac{|s_t| |s_t + p_2| |s_t + p_3|}{|s_t + z_1| |s_t + z_2|}$$

Lugar das raízes

- Regras de construção ($0 \leq K < \infty$):
 - Número de ramos = ordem da equação característica
 - Os polos de MA definem o começo do LGR ($K = 0$)

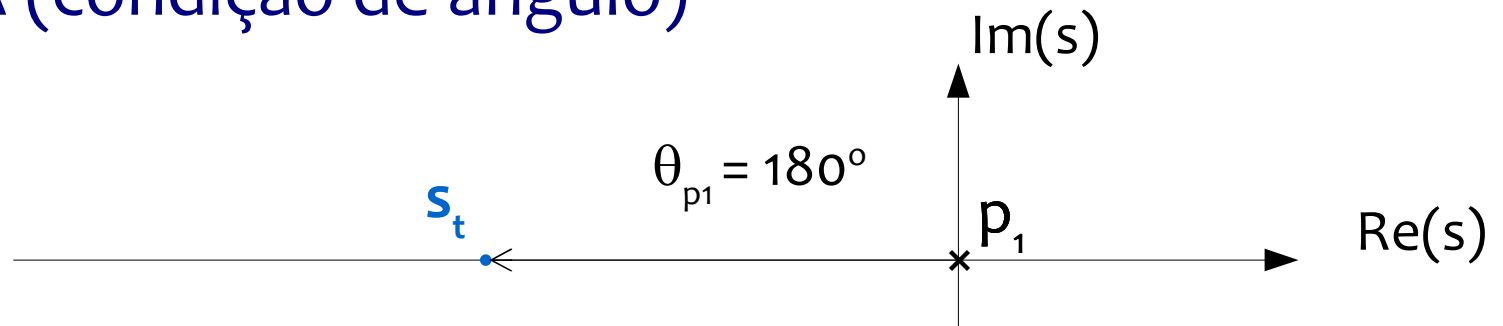
$$K = \frac{|s_t| |s_t + p_2| |s_t + p_3|}{|s_t + z_1| |s_t + z_2|} \quad s_t = 0, \quad s_t = -p_2, \quad s_t = -p_3$$

- Os zeros de MA definem o fim do LGR ($K \rightarrow \infty$)

$$K = \frac{|s_t| |s_t + p_2| |s_t + p_3|}{|s_t + z_1| |s_t + z_2|} \quad s_t = -z_1, \quad s_t = -z_2$$

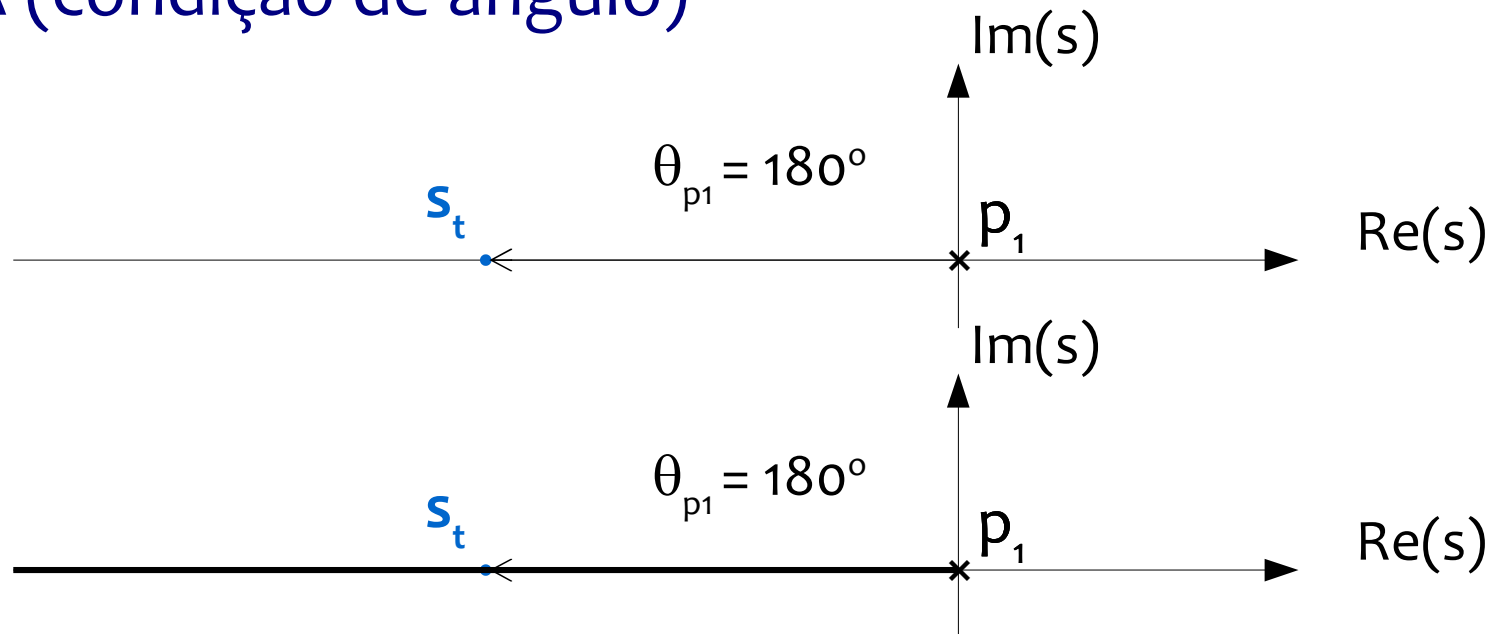
Lugar das raízes

- Regras de construção ($0 \leq K < \infty$):
 - n° de zeros no infinito = n° de polos - n° de zeros = $n - m$
 - Se o n° de polos e zeros no eixo real, à direita do ponto investigado, for ímpar, esta parte do eixo real pertence ao LGR (condição de ângulo)



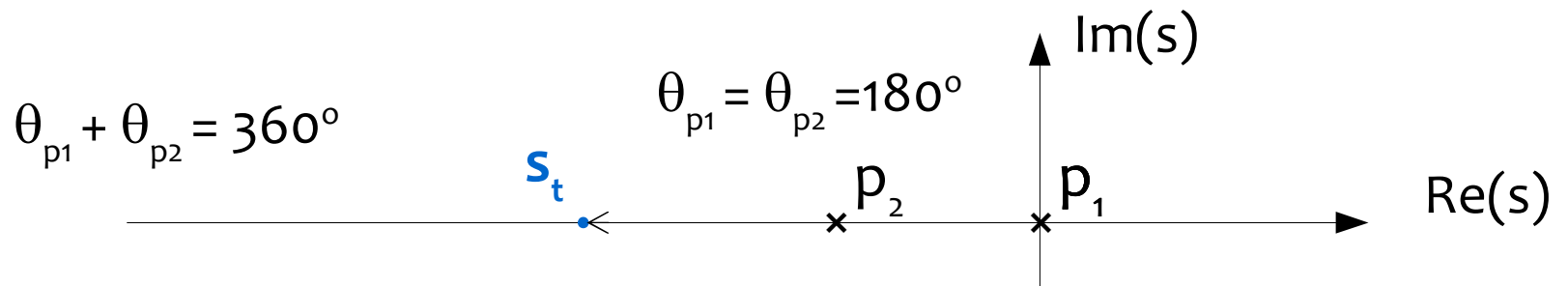
Lugar das raízes

- Regras de construção ($0 \leq K < \infty$):
 - n° de zeros no infinito = n° de polos - n° de zeros = $n - m$
 - Se o n° de polos e zeros no eixo real, à direita do ponto investigado, for ímpar, esta parte do eixo real pertence ao LGR (condição de ângulo)



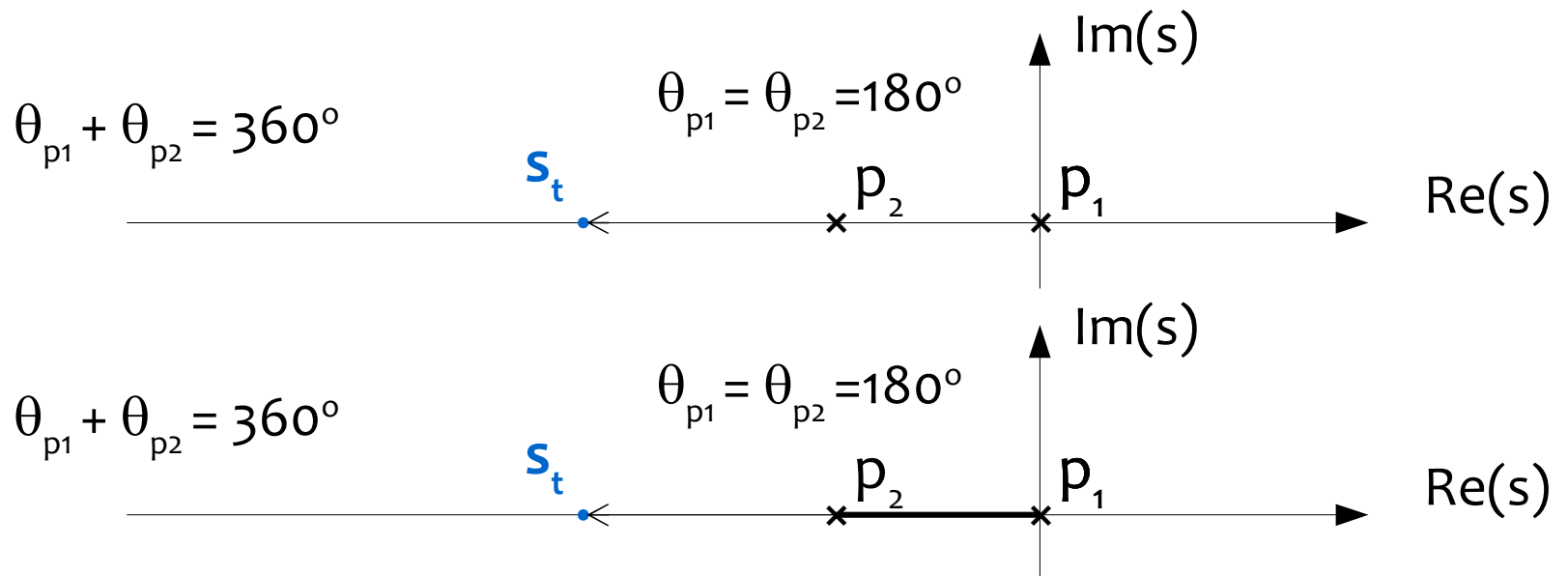
Lugar das raízes

- Regras de construção ($0 \leq K < \infty$):
 - n° de zeros no infinito = n° de polos - n° de zeros = $n - m$
 - Se o n° de polos e zeros no eixo real, à direita do ponto investigado, for ímpar, esta parte do eixo real pertence ao LGR (condição de ângulo)



Lugar das raízes

- Regras de construção ($0 \leq K < \infty$):
 - n° de zeros no infinito = n° de polos - n° de zeros = $n - m$
 - Se o n° de polos e zeros no eixo real, à direita do ponto investigado, for ímpar, esta parte do eixo real pertence ao LGR (condição de ângulo)



Lugar das raízes

- Regras de construção ($0 \leq K < \infty$):

- $K \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{K} = \frac{|s_t + z_1| |s_t + z_2|}{|s_t| |s_t + p_2| |s_t + p_3|} = 0$$

- $m = n$ e $s = z_j$

- $n > m$ e $s \rightarrow \infty$

- Neste caso, m polos convergem para os m zeros, e os $n-m$ polos restantes convergem para os $n-m$ zeros no infinito

Lugar das raízes

- Regras de construção ($0 \leq K < \infty$):

– $K \rightarrow \infty$:

$$G(s)_{s \rightarrow \infty} \approx \frac{1}{(s - \sigma_0)^{n-m}} = -\frac{1}{K}$$

- Intersecção das assíntotas com o eixo real:

$$\sigma_0 = \frac{\sum p_k - \sum z_j}{n-m}$$

- Ângulos das assíntotas:

$$\phi = \frac{\pi(1 + 2i)}{n-m} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-m-1$$

Lugar das raízes

- Regras de construção ($0 \leq K < \infty$):
 - Pontos de separação:
 - saída de um ramo do eixo real, se o ponto estiver situado entre dois polos, ou entrada no eixo real, se o ponto estiver situado entre dois zeros.
 - Correspondem aos mínimos ou máximos da função:

$$-G(s) = \frac{1}{K}$$
$$\frac{d\left(\frac{-1}{G(s)}\right)}{ds} = 0$$

Lugar das raízes

- Regras de construção ($0 \leq K < \infty$):
 - Ângulo de partida dos polos (ou de chegada dos zeros) complexos:
 - Aplica-se a condição de ângulo:
$$\theta_{z1} + \theta_{z2} - \theta_{p1} - \theta_{p2} - \theta_{p3} = \pm 180^\circ, \pm 540^\circ \dots$$
 - Intersecção com o eixo imaginário:
 - Aplica-se o critério de Routh-Hurwitz

Lugar das raízes

- Regras de construção ($-\infty < K \leq 0$)
 - O LGR parte dos zeros e chega nos polos de malha aberta
 - A parte sobre o eixo real que pertence ao LGR fica à esquerda de um n° par de polos e zeros finitos
 - Os ângulos das assíntotas são dados por

$$\phi = \frac{\pi(2i)}{n-m} \quad i=0,1,2,\dots,n-m-1$$

Juliana L. M. lamamura