

## 2 - TÉCNICA DOS GRAFOS DE LIGAÇÃO

A modelagem de sistemas dinâmicos vem sendo desenvolvida há vários anos e existem metodologias e técnicas (específicas e generalizadas), baseadas em hipóteses específicas, que permitem determinar um conjunto de equações (diferenciais e/ou algébricas) que definem o comportamento (dinâmico e/ou estático) do sistema no tempo.

O principal objetivo de se determinar um modelo matemático reside no fato dele ser necessário para predizer o funcionamento do sistema, o que permite a sua análise, simulação e identificação, possibilita a sua síntese e otimização, e viabiliza o projeto de seu controle.

Alguns dos procedimentos de modelagem conhecidos são conceituais, trazendo na sua formulação uma carga teórica bastante elevada, porém de emprego prático relativamente reduzido. Existem porém outras metodologias, menos conceituais, sem entretanto deixar de ser consistentes e bem formuladas, que são bem mais operacionais, ou seja: que efetivamente resolvem o problema de engenharia.

Nas últimas duas décadas, com o avanço das ferramentas computacionais, as técnicas de modelagem operacionais vêm evoluindo rapidamente, e grande parte do esforço de pesquisa na área de Dinâmica de Sistemas tem se concentrado em desenvolver aplicações e aplicativos utilizando estas metodologias. Atualmente é possível modelar, simular e analisar um sistema dinâmico, representativo de um dispositivo real, em computador. Neste trabalho procura-se avançar um pouco mais na direção do emprego de ferramentas teóricas e computacionais que auxiliem no desenvolvimento de modelos de sistemas físicos que tenham variação no tempo.

## 2.1 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

O problema de modelagem sistemas físicos consiste em saber determinar corretamente a representação e o conjunto de equações que definem a dinâmica do sistema, dentro de certas hipóteses, o que depende fundamentalmente do emprego a ser dado ao modelo.

Tanto o estabelecimento da representação física, que simplifica a estrutura do sistema real, quanto à decisão sobre que tipo de modelo matemático utilizar (linear ou não linear, parâmetros distribuídos ou concentrados, determinísticos ou estocásticos, discreto ou contínuo no tempo, estático ou dinâmico) estão nas mãos do engenheiro, cuja experiência no tratamento de problemas similares deve levar à melhor escolha tendo em vista a aplicação desejada.

Atualmente existem procedimentos que simplificam o trabalho dos engenheiros na determinação dos modelos matemáticos. A partir de uma representação gráfica apropriada, que estabeleça a estrutura física do sistema, e de um conjunto de equações básicas que definam os seus vários elementos, pode-se obter, automaticamente, o modelo matemático. A solução do modelo dinâmico também é facilitada pelos códigos computacionais bastante avançados que auxiliam na tarefa de resolver as equações representativas do sistema.

Porém existem ainda tópicos em aberto no que se refere a análise de modelos como, por exemplo, a escolha da forma de representação matemática adequada para certo tipo de análise ou aplicação ou, ainda, como escolher um modelo reduzido com justificativa física. Criar metodologias para o tratamento destes problemas, e de outros similares, permitirá avançar no sentido de automatizar o procedimento de modelagem e aumentar o domínio da área.

A Figura 2.1 ilustra o procedimento adotado para resolver o problema de modelagem e o emprego dado aos modelos desenvolvidos. Apesar da fronteira entre a **Modelagem Física** e a **Matemática** em alguns problemas ser bastante "nebulosa" e, inclusive, em alguns casos não haver esta primeira etapa, considerou-se que normalmente os passos representados nesta figura estão presentes no processo de modelar um sistema real.

Na etapa de **Modelagem Física** é desenvolvida uma versão simplificada do sistema real, baseada em hipóteses sobre a sua estrutura e seus elementos, de modo que se possa, a partir daí, obter um modelo matemático. Dentro do que se espera do modelo, deve-se sempre procurar uma estrutura suficientemente simples, mas que ao mesmo tempo seja a mais completa possível para representar o sistema, o que depende exclusivamente da formação conceitual e da experiência do engenheiro. Não é trivial obter um bom modelo físico. Esta é a **Engenharia** no processo de modelagem.

No primeiro estágio da **Modelagem Matemática** são definidas relações que caracterizam o comportamento dos elementos sistema. Aqui também se depende muito do engenheiro, pois equacionar componentes reais (ou mesmo idealizados) e estabelecer relações de restrição, exige um bom conhecimento do funcionamento do sistema e dos conceitos básicos de engenharia.

Estando o modelo descrito através de um conjunto de equações básicas: Constitutivas, de Compatibilidade e de Continuidade, deve-se proceder à manipulação destas, afim de obter uma das formas de representação. Este segundo estágio pode ser realizado automaticamente.



adequada o modelo se encontra à disposição do engenheiro para ser utilizado, de acordo com a necessidade.

Observa-se que, na maioria das vezes, o processo de modelagem é iterativo e a convergência só é alcançada quando o modelo desenvolvido realmente se presta para o fim a que foi proposto. Uma etapa intermediária entre o desenvolvimento do modelo e sua utilização pode ser a da obtenção de um modelo reduzido. É sobre a definição dos passos do procedimento de redução de ordem que o trabalho aqui proposto pretende se concentrar e, se possível, estabelecer uma metodologia para tratar de forma lógica e consistente este problema.

Uma das principais dúvidas encontradas na área de modelagem está relacionada à escolha da abordagem adequada para resolver um determinado problema. Existem vários caminhos que, a princípio, levam ao modelo matemático de um sistema dinâmico. Por uma série de razões nem sempre algumas abordagens permitem o tratamento operacional do problema, ou seja: não são de fácil aplicação quando tratados problemas de um certo grau de complexidade, estando muitas vezes restritas a sistemas simples. Por exemplo, a abordagem Lagrangeana clássica e conceitual em sistemas mecânicos quando aplicada ao problema de robótica torna-se muito pouco operacional, ou seja: o estabelecimento do modelo do sistema através desta técnica é bastante difícil. Os pesquisadores desta área desenvolveram uma metodologia operacional, a da Dinâmica Matricial (Craig, 1986), que estabelece um roteiro para o desenvolvimento do modelo podendo, inclusive, ser implementado computacionalmente.

Um outro aspecto é que muitas vezes se necessita reunir conceitos e informações de mais de uma abordagem para se estabelecer o modelo. O tratamento de controle de vibrações em estruturas é um exemplo típico da união de abordagens, pois todos os elementos de controle, atuação e transdução podem ser

modelados e representados por Grafos de Ligação, e a estrutura em si modelada pelo Método dos Elementos Finitos e representada pelos Grafos de Ligação (da Silva e Speranza Neto, 1992).

Conforme já mencionado, algumas metodologias, apesar de serem fortemente conceituais, são de aplicação prática discutível quando se trata, por exemplo, de equacionar sistemas dinâmicos complexos ou que envolvam interações de subsistemas de natureza física distinta. Analisar sistemas mecânicos com geometria complexa através da abordagem Lagrangeana enquadra-se neste caso.

De modo a se ter uma noção sobre as várias técnicas e abordagens de modelagem procurou-se fazer um levantamento visando, na medida do possível, descrevê-las segundo as aplicações, vantagens e desvantagens, limites de abrangência e operacionalidade, incluindo uma revisão bibliográfica reunindo as principais referências encontradas.

A Tabela 2.1 procura reunir algumas destas informações, para as abordagens até o momento mais conhecidas, onde se descreve as técnicas segundo a abordagem adotada. Considera-se como *clássica* aquela abordagem que desenvolve o modelo a partir dos princípios básicos de cada domínio físico. *Conceitual* é aquela que tem associado os conceitos fundamentais para a compreensão do sistema modelado. *Específica* é a abordagem que só pode ser aplicada a um domínio físico, e *generalizada* é a que pode ser usada em qualquer domínio. *Operacional* é a abordagem na qual se definem passos para o estabelecimento do modelo que podem ser implementados computacionalmente. E *limitada* é aquela que só pode ser usada para o problema específico para o qual foi desenvolvida.

Assim a abordagem Lagrangeana, que é sem dúvida conceitualmente muito forte, é porém pouco operacional,

apesar dos esforços de alguns autores que estão desenvolvendo programas de manipulação algébrica baseados nesta formulação, para aplicação em Dinâmica de Sistemas Mecânicos.

Também os Princípios Variacionais, por si só, não são operacionais, apesar de serem generalizados, como apresentado por Crandall et al. (1968). Já o Método dos Elementos Finitos, que em parte é embasado nos Princípios Variacionais, é de uma aplicabilidade indiscutível, haja vista o grande número de exemplos envolvendo as mais diversas áreas da engenharia como as de Estruturas Cíveis e Mecânicas, Escoamento de Fluidos, Transmissão de Calor e Eletromagnetismo. Entretanto são poucos os trabalhos que tratam por Elementos Finitos a interação de sistemas de natureza física distinta.

TÉCNICA	ABORDAGEM					APLICAÇÕES
	CONSTITUCIONAL	CONSTITUTUAL	ESPECÍFICA	GENERALIZADA	OPERACIONAL	
NEWTON	X	X	X			Mecânica
KIRCHHOFF	X	X	X			Elettricidade
FOURIER	X	X	X			Calor
NAVIER-STOKES	X	X	X			Fluidos
MAXWELL	X	X	X			Magnetismo
LAGRANGE	X	X		X		"Geral"
PRINCÍPIOS VARIACIONAIS	X	X		X		"Geral" MEC/ELE/FLU/CAL/MAG
MÉTODOS DE ENERGIA	X	X		X		"Geral"
DINÂMICA DE CORPOS RÍGIDOS MATRICIAL			X		X	Mecanismos Robótica
MÉTODO DOS COMPONENTES			X		X X	Vibrações Mecânicas
ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS			X		X X	Estruturas Cíveis e Mecânicas
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS				X	X X	"Geral" Estruturas
GRAFOS LINEARES				X	X X	"Geral"
GRAFOS DE ESTRUTURA				X	X	"Geral"
GRAFOS DE LIGAÇÃO				X	X	GERAL

Tabela 2.1: Descrição das Técnicas segundo a Abordagem

Já a Abordagem Matricial da Dinâmica de Corpos Rígidos, apresentada nos trabalhos de Crouch (1981), Haug (1989) e Craig (1986), entre outros, só encontra aplicação prática em Robótica e Mecanismos sendo, portanto, bastante específica.

Algumas metodologias ainda pouco divulgadas podem ter grande importância dentro de um futuro próximo, como é o caso da proposta por Arczewski em trabalho de 1990, sobre a aplicação da Teoria dos Grafos na modelagem de sistemas de corpos rígidos. Esta formulação específica vem de encontro ao principal problema dos Métodos de Energia, ou dos Princípios Variacionais, quando aplicados a sistemas mecânicos, que é a inclusão da compatibilidade cinemática no modelo. Entretanto como ainda não se tem notícias de resultados práticos envolvendo esta proposta, nada se pode ainda afirmar sobre sua operacionalidade. Em contra-partida uma metodologia generalizada como a dos Grafos Lineares (Koenig e Blackwell, 1961 e Shearer et al., 1971), apesar de ser operacional, está em desuso devido, principalmente, as suas limitações de representação. Uma outra abordagem que não apresentou evolução desde que foi proposta é a conhecida como Grafos de Estrutura (Liebner et al., 1987).

Atualmente a técnica dos Grafos de Ligação (Karnopp et al., 1990) é a que se apresenta como a mais completa em uma série de aspectos, tais como operacionalidade e simplicidade, facilidade para obtenção de modelos (automática ou não), generalidade, uniformidade e clareza de representação e tratamento. Apesar de não prescindir dos conceitos básicos estabelecidos por outras abordagens, e de algumas vezes precisar de outras técnicas (como o Método dos Elementos Finitos) para descrever modelos específicos de uma área, a técnica dos Grafos de Ligação consegue reunir várias vantagens em relação às demais.

O modelo de um dispositivo desenvolvido em Grafos de Ligação, mesmo que com o auxílio de outra metodologia, pode ser utilizado como se fosse o próprio sistema real, pois são definidas "ligações" de entrada e saída de potência que permitem a conexão deste com qualquer outro elemento representado pela técnica. Isto caracteriza o que se chama de modularidade. Pode-se com isto criar uma gama enorme de modelos, todos com uma mesma representação, que por sua vez podem ser conectados a outros e assim sucessivamente. Em particular na área de Controle, onde a natureza interdisciplinar dos sistemas é quase inevitável, a aplicação desta metodologia de modelagem é fortemente recomendada.

Uma outra vantagem, relacionada particularmente aos sistemas mecânicos, está na facilidade de se obter a sua dinâmica a partir da cinemática. Isto vai ao encontro de uma das principais dificuldades de modelagem destes sistemas que é o estabelecimento das equações de movimento para modelos mecânicos de uma certa complexidade (elevado número de graus de liberdade e/ou não linearidades geométricas). Apesar de vários pesquisadores ainda investirem no desenvolvimento de metodologias apropriadas para o tratamento de dispositivos em geral, como é o caso de Korn (1987), acredita-se que a técnica dos Grafos de Ligação tenha atingido um grau de maturidade suficiente para ser considerada a abordagem a ser empregada nos próximos anos, mesmo considerando que ainda existem alguns tópicos em aberto, o que motivou o trabalho aqui proposto.

## 2.2 - Conceitos dos Grafos de Ligação

A técnica dos Grafos de Ligação (*Bond Graphs*) é uma ferramenta poderosa na modelagem de dispositivos complexos, que podem incluir sistemas de naturezas físicas distintas, tais como elétricos, mecânicos, hidráulicos, pneumáticos e térmicos, ou combinações desses, entre outros. Desenvolvida

para representar sistemas de parâmetros concentrados, lineares ou não, possui generalizações que possibilitam sua aplicação à sistemas de parâmetros distribuídos, como os campos eletro-magnéticos e estruturas mecânicas, à dinâmica de corpos rígidos no espaço, e à termodinâmica.

Criada por H.M. Paynter no final da década de 50, e desenvolvida por D.C. Karnopp e R.C. Rosenberg em meados da década de 60, esta técnica conta atualmente com um grande número de publicações, e engenheiros e pesquisadores de todo mundo utilizam-na como ferramenta de trabalho a cerca de duas décadas. No Brasil ainda são poucos os que a dominam e a utilizam no seu dia a dia.

Esta técnica estabelece uma representação gráfica adequada para a estrutura do modelo físico do sistema e possui uma formulação bem definida e consistente para o desenvolvimento do modelo matemático. São características dos Grafos de Ligação:

- 1) Representação apropriada para as propriedades físicas dos elementos e para as relações de causa e efeito e restrições entre variáveis;
- 2) Modularidade na modelagem, permitindo que o modelo de um sistema seja obtido a partir da modelagem de seus subsistemas;
- 3) Sistemática para obtenção das equações de estado.

A técnica dos Grafos de Ligação, além de permitir a representação gráfica do sistema e estabelecer o modelo matemático a partir do próprio grafo, possibilita ainda a análise do sistema dinâmico. Tanto a simulação numérica, através de programas apropriados tais como o CAMP (Granda, 1985) juntamente com o ACSL, ou o BONDYN (Felez et al.,1990), quanto a análise das características dinâmicas do sistema podem ser realizadas sem necessariamente obter o modelo de estado. Isto mostra uma vez mais que esta abordagem é bastante

completa em todos os aspectos.

Existem procedimentos desenvolvidos para, diretamente do grafo, estimar os autovalores da matriz de estado (Zeid e Rosenberg, 1985), verificar a controlabilidade e observabilidade (Suda e Hatanaka, 1985), analisar sistemas de controle (Karnopp, 1979), e obter certos tipos de modelos reduzidos (Sueur e Dauphin-Tanguy, 1991a). Assim alguns resultados que só eram obtidos após o modelo matemático estar pronto podem ser avaliados antes mesmo do equacionamento ter sido completado. Sob o ponto de vista da Engenharia isto é extremamente útil pois, durante a modelagem, já se pode ter noção do comportamento do sistema, permitindo alterações e correções imediatas.

Como o número de trabalhos envolvendo a Análise de Sistemas Dinâmicos através dos Grafos de Ligação ainda não é considerável, acredita-se que há muito a se fazer nesta sub-área, o que motivou o trabalho aqui proposto. Atualmente uma das preocupações dos pesquisadores desta técnica concentra-se exatamente na sua utilização para análise, uma vez que este é um assunto pouco explorado. Um outro caminho aberto por Birkett e Roe (1989a) trata dos fundamentos matemáticos dos Grafos de Ligação.

Embora não seja objetivo deste trabalho apresentar a teoria dos Grafos de Ligação é interessante ressaltar alguns pontos fundamentais para a sua aplicação, visando principalmente àqueles menos familiarizados. Observa-se que termo *Bond Graph* está sendo traduzido na literatura científica brasileira por *Grafo de Ligação*, nome bastante apropriado devido ao fato que sua principal característica é a de ligar os elementos do sistema.

### 2.3 - Elementos Básicos Grafos de Ligação

A técnica dos Grafos de Ligação caracteriza-se pela representação do modelo físico de um sistema, através de uma estrutura gráfica lógica, onde estão contidos os fluxos de energia e informação entre os componentes do sistema. São utilizadas quatro tipos de variáveis generalizadas: variável de esforço ( $e$ ), de fluxo ( $f$ ), de quantidade de movimento ( $p$ ) e de deslocamento ( $q$ ).

Um modelo em Grafo de Ligação é composto por elementos ou subsistemas conectados por ligações ("bonds") que representam o fluxo de potência entre eles, ou seja: é nestas ligações que ocorre a transmissão de potência entre os elementos ou subsistemas. A ligação é representada por uma linha e a ela estão associadas uma variável de esforço e uma variável de fluxo.

É utilizada uma meia seta para indicar o sentido em que a potência flui através de cada ligação em um instante de tempo. Quando tanto a variável de esforço como a de fluxo são positivas, a potência é positiva, por definição, no sentido da meia seta, conforme mostra a Figura 2.2.

$$\frac{e}{f} \rightarrow$$

FIGURA 2.2: Representação de uma ligação em Grafo de Ligação

As variáveis de esforço e de fluxo são chamadas variáveis de potência porque o produto dessas duas variáveis, consideradas como funções do tempo, é igual à potência instantânea que flui entre os dois elementos ou subsistemas conectados. Assim,

$$P(t) = e(t) \cdot f(t)$$

As variáveis quantidade de movimento ( $p$ ) e deslocamento ( $q$ ) são chamadas de variáveis de energia (ou variáveis hamiltonianas). Essas duas variáveis são relacionadas às variáveis de potência pelas relações de integração

$$p(t) = \int_0^t e(t) dt$$

$$q(t) = \int_0^t f(t) dt$$

A Tabela 2.2 na página a seguir apresenta os principais domínios físicos que podem ser representados em Grafos de Ligação e as suas respectivas variáveis generalizadas. Observa-se que em alguns domínios físicos a variável quantidade de movimento generalizada não é definida, o que, entretanto, não altera a analogia estabelecida por esta técnica. Também os Pseudo-Grafos de Ligação, uma forma fraca de representação, onde o produto das variáveis fluxo e esforço não fornece a potência instantânea, limitam certas interações de potência mas não alteram as leis básicas desta metodologia.

A técnica de Grafos de Ligação possui nove elementos básicos, que combinados convenientemente descrevem o modelo físico de um sistema. O modelo matemático é determinado a partir das equações constitutivas destes elementos, juntamente com as atribuições de fluxo de potência e causalidade, também representadas no grafo. Estes elementos básicos são: **elementos puros, fontes ideais e junções.**

**Elementos Puros** são versões matemáticas idealizadas de componentes reais, tais como resistências, capacitores, massas, molas e outros. Em alguns casos, os elementos puros podem ser empregados para representar características próprias de um sistema, sem que haja uma correspondência física direta com algum componente desse sistema. Um elemento puro caracteriza-se por representar uma única propriedade física de um componente real através de relações matemáticas (equações

um componente real através de relações matemáticas (equações constitutivas) entre certas variáveis. Assim, podem ser necessários vários elementos idealizados para representar um único componente real, por mais simples que ele seja.

DOMÍNIO FÍSICO	ESFORÇO $e$	FLUXO $f$	QUANTIDADE DE MOVIMENTO $p$	DESLOCAMENTO $q$
MECÂNICO TRANSLAÇÃO	Força [N]	Velocidade [m/s]	Quantidade de Movimento [N.s]	Posição [m]
MECÂNICO ROTAÇÃO	Torque [N.m]	Velocidade Angular [rad/s]	Quantidade de Movimento [N.m.s]	Ângulo [rad]
ELÉTRICO	Voltagem [V]	Corrente [A]	Enlace de Fluxo [V.s]	Carga [C]
HIDRÁULICO	Pressão [Pa]	Vazão em Volume [m <sup>3</sup> /s]	Quantidade de Movimento de Pressão [Pa.s]	Volume [m <sup>3</sup> ]
TERMO-DINÂMICO	Temperatura [K]	Fluxo de Entropia [W/K]	-----	Entropia [J/K]
MAGNÉTICO	Força Magnetomotriz [A]	Derivada do Campo [Wb/s]	-----	Densidade do Campo [Wb]
DIFUSÃO	Potencial Químico [J/mole]	Fluxo Molar [mole/s]	-----	Quantidade [mole]
REAÇÃO QUÍMICA	Afinidade [J/mole]	Taxa de Reação [mole/s]	-----	Avanço [mole]
Pseudo-GRÁFO DE LIGAÇÃO TÉRMICO	Temperatura [C]	Fluxo de Calor [W]	-----	Energia [J]
Pseudo-GRÁFO DE LIGAÇÃO FLUIDO	Pressão [Pa]	Vazão em Massa [kg/s]	-----	Massa [Kg]

Tabela 2.2: Domínio Físico e Variáveis de Potência e Energia

Os elementos puros são o resistor, o capacitor, a inércia, o transformador e o girador. O resistor, o capacitor e a inércia são chamados de elementos de uma porta, porque

neles a potência flui através de uma única ligação. Os elementos puros de uma porta têm uma generalização multiportas através do conceito de campos.

O **resistor** é um elemento que dissipa energia, no qual a variável de esforço e a de fluxo estão associadas por uma relação estática. O **capacitor** é um elemento que armazena energia, onde existe uma relação estática entre a variável de esforço e a de deslocamento. A **inércia** também é um elemento armazenador de energia, na qual se estabelece uma relação estática entre a variável de fluxo e a de quantidade de movimento.

O **transformador** é um elemento de duas portas no qual, por definição, a potência é conservada. O emprego desse elemento normalmente está associado à transformação das variáveis generalizadas de um sistema para outro ou dentro do próprio sistema. Nele existem duas relações entre as variáveis generalizadas envolvidas: uma relaciona as variáveis de esforço e a outra relaciona as variáveis de fluxo. O **girador** é outro elemento de duas portas onde a potência é conservada. Nele se define uma relação entre a variável de esforço da entrada e a variável de fluxo da saída e vice-versa. Quando o módulo do transformador ou do girador tem algum tipo de variação, então esses dois elementos são chamados de **transformador modulado (MTF)** e **girador modulado (MGY)**. Estes elementos são generalizações dos acima descritos.

**Fontes Ideais** são os componentes que fornecem energia ilimitada ao sistema, na forma de esforço ou/e de fluxo. Nelas a variável generalizada correspondente é mantida constante ou obedece à uma função do tempo, independentemente da potência requerida.

**Junções** são elementos multiportas especiais definidos de modo a poder acoplar os elementos puros e as fontes ideais que

compõem um sistema. Elas representam restrições no comportamento do sistema, devido ao acoplamento físico existente entre os elementos. As **junções** são duas: a **Junção 0**, também chamada de junção de esforço comum, que representa um somatório de fluxos; e a **Junção 1**, também chamada de junção de fluxo comum, que representa um somatório de esforços. A generalização do conceito de junção é chamada de **Estrutura de Junção**, que é definida como um conjunto de junções 0 e 1, transformadores e giradores, com suas ligações.

A metodologia de construção do Grafo de Ligação para os vários domínios físicos capazes de serem representados por esta técnica não será tratada neste texto. Aos interessados recomenda-se a leitura do texto original de Karnopp et al. (1990) ou a apostila de Speranza Neto (1994), escrita com base neste livro.

Uma característica de grande importância da técnica dos Grafos de Ligação é a possibilidade de se representar, de forma bem definida, a relação de causa e efeito entre as variáveis de potência. Em cada ligação estão presentes a variável de esforço e a de fluxo e, só é possível fisicamente controlar uma delas, sendo a outra resultante em função da potência. Assim, pode-se dizer que uma variável é necessariamente a entrada e a outra é a saída. A causalidade é representada no grafo por uma barra perpendicular colocada em uma das extremidades da ligação, chamada de **barra causal**, que mostra a direção em que a variável de esforço está dirigida, ou seja: para que lado a variável de esforço atua como entrada. É importante ressaltar que a causalidade e o sentido da potência em uma ligação são completamente independentes. A primeira indica a relação de causa e efeito entre as variáveis de potência, determinando a variável que é entrada e a que é saída na ligação; enquanto que a meia seta indica em que sentido a potência é positiva, no qual ambas as variáveis de potência são positivas ou ambas negativas.

As fontes ideais apresentam uma causalidade única. A fonte de esforço tem a variável de esforço como entrada para o sistema ao qual está ligada. Da mesma forma a fonte de fluxo tem a variável de fluxo como entrada para o sistema ao qual está ligada. O elemento resistor admite as duas causalidades possíveis, sem haver nenhuma prioridade, para o caso linear, na escolha de uma ou de outra. Os elementos capacitor e inércia admitem também as duas causalidades, porém, existe uma preferência na atribuição. De maneira a definir corretamente o equacionamento deve-se, sempre que possível, atribuir a estes elementos a causalidade que resulta na relação de integração entre as variáveis de esforço e de fluxo.

No caso do capacitor a relação de integração é obtida quando a variável de esforço é a saída. Já no elemento de inércia a relação de integração é obtida quando a variável de fluxo é a saída. A causalidade integral dos elementos inércia e capacitor indica que as variáveis de energia a eles relacionadas são variáveis de estado, que formam a base do modelo matemático do sistema. Observa-se que o conhecimento de um conjunto suficiente de variáveis de estado, juntamente com as excitações, permite predizer a resposta do sistema ao longo do tempo.

No elemento transformador, seja modulado ou não, duas causalidades são admitidas respeitando a seguinte condição física: a variável de potência que for entrada de um lado do transformador deve ser saída do outro lado. O elemento girador também admite duas causalidades, respeitada a seguinte condição: a variável de potência que é entrada de um lado também é entrada do outro lado do girador.

Com relação a junção 0, como todas as variáveis de esforço devem ser iguais, somente uma delas deve ser a entrada e as demais conseqüentemente serão saídas. Assim, somente uma das ligações da junção 0 deve ter a barra causal junto a

junção. Dessa forma haverá apenas uma variável de fluxo como saída. O mesmo raciocínio é válido para a junção 1, considerando que todas as ligações devem ter a mesma variável de fluxo. Assim basta uma delas ser entrada para que as demais estejam bem definidas. Portanto, apenas uma ligação deve ter a causalidade do lado externo da junção.

Para atribuição da causalidade no grafo representativo de um sistema dinâmico existe um procedimento sequencial (SCAP - *Sequential Causality Assignment Procedure*) dado em Karnopp et al. (1990) que, respeitando as restrições individuais de cada elemento, possibilita definir as relações de causa e efeito em todas as ligações. Isto implica no estabelecimento das variáveis de estado de energia do sistema: quantidades de movimento em inércias e deslocamento em capacitores com causalidade integral.

Estas variáveis, como já mencionado, formarão a base do modelo matemático, cujo desenvolvimento pode ser realizado de forma manual (Karnopp et al. 1990), para sistemas de pequeno porte, ou automaticamente, segundo um procedimento descrito em Rosenberg (1971), quando o sistema é complexo. Para sistemas lineares este procedimento é matricial, o que permite implementar um código computacional, como mostrado em Pedroza e Speranza Neto (1991 e 1992).

Adiante no Capítulo 4 será discutida uma nova formulação para a obtenção do modelo matemático de sistemas exclusivamente mecânicos, onde se consegue definir outros conjuntos de variáveis de estado, e também os graus de liberdade do sistema, necessários para o estabelecimento das equações de movimento. Tradicionalmente a Técnica dos Grafos de Ligação não fornece o modelo na forma de equações de movimento, comuns em sistemas mecânicos.

A Tabela 2.3 a seguir apresenta um resumo dos elementos,

suas equações constitutivas e atribuição de causalidade. Observa-se que no caso dos transformadores, giradores, junção 0 e 1, encontra-se representada uma das possíveis atribuições de potência e causalidade, juntamente com as equações resultantes.

ELEMENTO	REPRESENTAÇÃO CAUSAL	RELAÇÃO CAUSAL
Fonte de Esforço	$S_e \rightarrow$	$e(t) = E(t)$
Fonte de Fluxo	$S_f \leftarrow$	$f(t) = F(t)$
Resistor	$R \leftarrow$	$e = \Phi_R(f)$
	$R \rightarrow$	$f = -\Phi_R(e)$
Capacitor	$C \leftarrow$	$e = \Phi_C^{-1}(\int f dt)$
	$C \rightarrow$	$f = \frac{d}{dt} \Phi_C(e)$
Inércia	$I \leftarrow$	$f = \Phi_I^{-1}(\int e dt)$
	$I \rightarrow$	$e = \frac{d}{dt} \Phi_I(f)$
Transformador	$\begin{array}{c} m \\ \hline \rightarrow 1 \quad TF \quad \leftarrow 2 \end{array}$	$e_1 = m e_2$ $f_2 = m f_1$
	$\begin{array}{c} 1/m \\ \hline \leftarrow 1 \quad TF \quad \rightarrow 2 \end{array}$	$e_2 = e_1/m$ $f_1 = f_2/m$
Girador	$\begin{array}{c} r \\ \hline \rightarrow 1 \quad GY \quad \leftarrow 2 \end{array}$	$e_1 = r f_2$ $e_2 = r f_1$
	$\begin{array}{c} 1/r \\ \hline \leftarrow 1 \quad GY \quad \rightarrow 2 \end{array}$	$f_1 = e_2/r$ $f_2 = e_1/r$
Junção 0	$\begin{array}{c} \leftarrow 1 \quad 0 \quad \leftarrow 2 \\ \uparrow 3 \end{array}$	$e_2 = e_1$ $e_3 = e_1$ $f_1 = -(f_2 + f_3)$
Junção 1	$\begin{array}{c} \rightarrow 1 \quad 1 \quad \leftarrow 2 \\ \uparrow 3 \end{array}$	$f_2 = f_1$ $f_3 = f_1$ $e_1 = -(e_2 + e_3)$

Tabela 2.3: Elementos, Equações Constitutivas e Causalidade

## 2.4 - Generalização dos Elementos Básicos

A Técnica dos Grafos de Ligação foi originalmente desenvolvida para representar modelos de parâmetros concentrados, ou seja: aqueles nos quais as características dinâmicas são consideradas escalares. Neste caso as equações constitutivas, que definem as propriedades dos elementos puros da técnica, relacionam apenas uma variável de entrada com uma de saída, caracterizando elementos de uma porta.

Entretanto existem inúmeros problemas de engenharia onde não se pode adotar a hipótese de parâmetros concentrados para representar um certo fenômeno. Neste caso as propriedades dinâmicas relacionam mais de uma variável de entrada com outras tantas de saída, caracterizando, para modelos lineares, uma relação constitutiva matricial, o que deve ser representado por elementos de mais de uma porta, ou multiportas. Os fenômenos de parâmetros distribuídos se enquadram neste modelo e, para empregá-los segundo os elementos dos Grafos de Ligação deve-se discretizá-los no espaço (Karnopp et al., 1990).

Assim, de modo que estes fenômenos pudessem ser representados pelos Grafos de Ligação, aumentando a sua potencialidade e versatilidade, foi criada uma extensão dos seus elementos básicos, nos quais há mais de uma ligação na entrada e na saída. Estes elementos multiportas são os campos armazenadores e dissipador, as junções vetoriais, os multitransformadores e multigiradores, e a estrutura de junção, que na verdade é a união dos elementos de junção e de acoplamento.

Os campos são generalizações multiportas dos elementos C, I e R, caracterizando as propriedades de armazenamento e dissipação de energia, que não podem ser representadas por relações constitutivas escalares. A Figura 2.3 compara os

elemento básicos de uma porta com os multiportas. Deve-se notar que estes elementos generalizados mantêm as mesmas características daqueles de uma porta, apenas possuem mais portas de entrada e saída, e a equação constitutiva relaciona todas as variáveis envolvidas nas ligações.

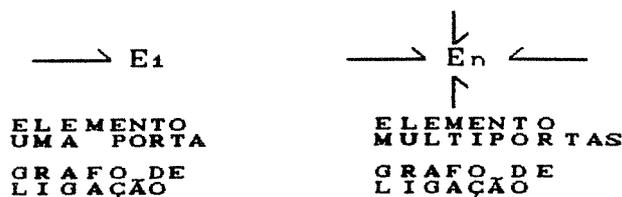


Figura 2.3: Elementos Multiportas

São definidos dois níveis de campos, segundo a forma pela qual estes foram desenvolvidos. Os CAMPOS EXPLÍCITOS são obtidos diretamente do equacionamento do elemento, podendo representar discretizações espaciais de modelos de parâmetros distribuídos. No caso linear, estes assumem matematicamente a forma de matrizes normalmente cheias, bloco diagonal ou no mínimo esparsas. Quando são aglutinados vários elementos de parâmetros concentrados de um mesmo tipo em um campo, cujo modelo matemático é uma matriz diagonal, também está se definindo um campo explícito. Quando são unidos elementos de parâmetros distribuídos e de parâmetros concentrados para caracterizar um modelo genérico em Grafos de Ligação, obtém-se uma matriz bloco diagonal, que caracteriza também um campo explícito.

Já os CAMPOS IMPLÍCITOS são obtidos pela manipulação do grafo original, caracterizando propriedades semelhantes às dos elementos puros, porém envolvendo a forma pela qual estes elementos se encontram conectados entre si. Assim qualquer grupo de elementos do mesmo tipo, de uma ou mais portas, pode ser representado por um campo implícito. As conexões série e

paralela de resistores, capacitores e inércias possibilitam o desenvolvimento de campos implícitos, onde há também influência dos elementos de junção, dos transformadores e dos giradores. No Capítulo 5 deste trabalho discute-se sobre o desenvolvimento destes campos para sistemas mecânicos. Observa-se que os campos implícitos, após o processo de manipulação do grafo, tornam-se explícitos!

O campo de capacitores, chamado CAMPO-C, implícito ou explícito, caracteriza-se por relacionar estaticamente as variáveis esforço e deslocamento de todas as portas ou ligações a ele associadas. A Figura 2.4 mostra a representação deste campo e as variáveis por ele relacionadas, organizadas na forma vetorial. Os exemplos deste elemento são encontrados nos diversos domínios físicos tratados pelos Grafos de Ligação. Em mecânica a flexibilidade estrutural é um campo C explícito; a combinação de molas, em série e/ou paralelo, pode gerar campos C implícitos, assim como as combinações de capacitores elétricos.

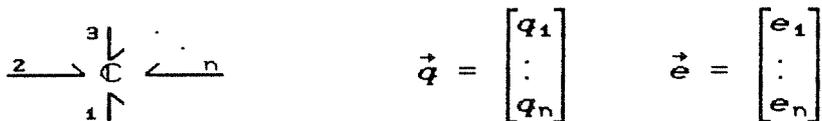


Figura 2.4: Campo de Capacitores

No caso linear o modelo matemático deste elemento, supondo todas as ligações com causalidade do fluxo entrando para o elemento, ou seja causalidade integral, é dado por

$$\vec{e} = \mathbb{C}^{-1} \vec{q}$$

onde

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

é uma matriz simétrica, desde que todas as ligações estejam entrando para o elemento, e normalmente positiva definida (Rosenberg e Karnopp, 1983). Note que sempre é possível definir a causalidade diferencial em todas as ligações deste campo, o que implica em se trabalhar com a relação inversa da apresentada acima. Também ocorre em certos modelos de algumas ligações possuírem causalidade derivativa e outras causalidade integral, resultando na causalidade mista no campo  $\mathbb{C}$ .

A potência associada a este elemento é dada pelo produto escalar das variáveis vetoriais esforço e fluxo, ou

$$P = \vec{e}^T \vec{f} = \vec{f}^T \vec{e}$$

e a energia potencial, característica neste elemento, é obtida por integração da expressão acima, substituindo a equação constitutiva que relaciona  $\vec{q}$  e  $\vec{e}$ , fornecendo

$$E = \frac{1}{2} \vec{e}^T \mathbb{C} \vec{e} \quad \text{ou} \quad E = \frac{1}{2} \vec{q}^T \mathbb{C}^{-1} \vec{q}$$

desde que a matriz  $\mathbb{C}$  tenha inversa (seja positiva definida).

O campo de inércias, CAMPO- $\mathbb{I}$ , implícito ou explícito, relaciona estaticamente as variáveis quantidade de movimento e fluxo, associadas as suas ligações. A Figura 2.5 mostra a representação deste campo, em ligações simples, juntamente com suas principais variáveis, organizadas na forma vetorial. O Tensor de Inércia é um exemplo de um campo  $\mathbb{I}$  explícito, obtido pelas propriedades inerciais de sistemas mecânicos com movimento de rotação no espaço. As combinações de inércias mecânicas em paralelo podem gerar um campo implícito. As combinações série e/ou paralela de indutores, geram campos implícitos nos sistemas elétricos.

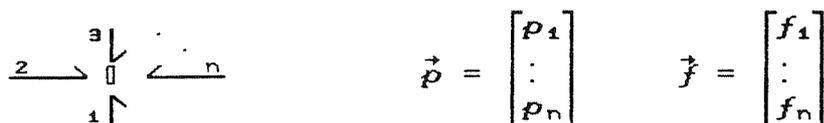


Figura 2.5: Campo de Inércias

Nos modelos lineares, supondo todas as ligações com causalidade integral, aquela do esforço entrando para o elemento, tem-se

$$\vec{f} = \mathbb{I}^{-1} \vec{p}$$

onde

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} i_{11} & i_{12} & \dots & i_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \dots & i_{nn} \end{bmatrix}$$

é uma matriz simétrica, se todas as ligações entram para o elemento, e sempre positiva definida (Rosenberg e Karnopp, 1983). Também para este campo é possível definir todas as ligações com causalidade derivativa, ou ainda um campo com causalidade mista!

A potência que entra para este elemento é dada por

$$P = \vec{f}^T \vec{e} = \vec{e}^T \vec{f}$$

e a energia cinética associada a este elemento é obtida por integração da expressão acima, substituindo a relação constitutiva entre as variáveis  $\vec{p}$  e  $\vec{f}$ , fornecendo

$$E = \frac{1}{2} \vec{f}^T \mathbb{I} \vec{f} \quad \text{ou} \quad E = \frac{1}{2} \vec{p}^T \mathbb{I}^{-1} \vec{p}$$

que pode ser sempre obtida uma vez que  $\mathbb{I}^{-1}$  sempre existe!

O campo dissipador, denominado CAMPO- $\mathbb{R}$ , implícito ou explícito, se caracteriza por relacionar diretamente as variáveis esforço e fluxo em todas as ligações a ele associadas. Na Figura 2.6 mostra-se a simbologia adotada para representar este elemento, juntamente com as suas variáveis na forma vetorial. A dissipação estrutural, que possui vários modelos matemáticos, é um tipo de campo  $\mathbb{R}$  explícito, e as combinações série e paralela de resistores em uma rede elétrica, podem gerar campos  $\mathbb{R}$  implícitos.

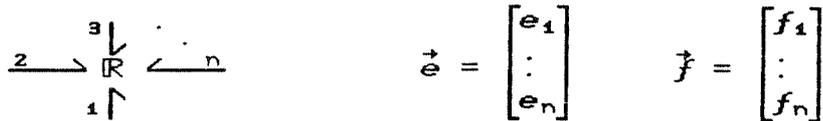


Figura 2.6: Campo Resistor

No caso dos modelos lineares, supondo a causalidade do fluxo entrando em todas as ligações, tem-se

$$\vec{e} = \mathbb{R} \vec{f}$$

onde

$$\mathbb{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

é uma matriz, não necessariamente simétrica, mas sempre positiva definida (Rosenberg e Karnopp, 1983). Novamente para este campo também é possível definir a causalidade do esforço entrando em todas as ligações e a causalidade mista.

A potência dissipada neste elemento multiporta é dada por

$$P = \vec{f}^T \vec{e} = \vec{e}^T \vec{f} \quad \therefore \quad P = \vec{f}^T \mathbb{R} \vec{f} \quad \text{ou} \quad P = \vec{e}^T \mathbb{R}^{-1} \vec{e}$$

desde que a matriz  $\mathbb{R}$  tenha inversa, o que ocorre sempre!

A Estrutura de Junção é um elemento generalizado multiportas, que caracteriza-se pela reunião dos elementos 0, 1, TF, MTF, GY e MGY. Assim como seus componentes, ela conserva a potência. A sua representação gráfica pode ser a mostrada na Figura 2.7, porém esta não é muito empregada, pois prefere-se discriminar os seus elementos componentes, como será visto adiante.

Este elemento caracteriza a topologia do modelo Grafo de Ligação e contém todas as informações sobre a estrutura do

modelo como, por exemplo, a controlabilidade e observabilidade estrutural (Suda e Hatanaka, 1985 e Sueur e Dauphin-Tanguy, 1989, 1991a e 1991b) e a existência de elementos equivalentes, como será visto no próximo capítulo. A estrutura de junção pode ser empregada para analisar o sistema dinâmico, nos mais diversos níveis, antes do modelo matemático na sua forma fechada ter sido desenvolvido. Ela traduz matematicamente a forma pela qual os elementos armazenadores e dissipadores encontram-se conectados entre si, o que, por exemplo, nos sistemas mecânicos define os vínculos cinemáticos e de equilíbrio.

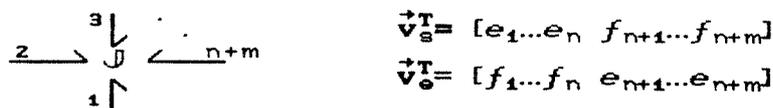


Figura 2.7: Estrutura de Junção

Note pelo esquema mostrado na Figura 2.7, que os vetores de entrada  $\vec{v}_e$  e de saída  $\vec{v}_s$  da estrutura de junção possuem simultaneamente variáveis de esforço e de fluxo, o que está relacionado à causalidade atribuída a cada ligação. O modelo matemático da estrutura de junção é sempre linear, podendo ser variante no tempo, representado pela matriz estrutura de junção, escrita a partir de

$$\vec{v}_s = \mathcal{J} \vec{v}_e$$

e dada por

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & \dots & J_{1,n+m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{n+m,1} & J_{n+m,2} & \dots & J_{n+m,n+m} \end{bmatrix}$$

cuja principal característica consiste no fato de ser anti-simétrica (Rosenberg e Karnopp, 1983), como se verificará adiante.

A conservação de potência através deste elemento garante que,

$$P = \vec{f}^T \vec{e} = \vec{e}^T \vec{f} = \vec{v}_e^T \vec{v}_s = \vec{v}_s^T \vec{v}_e = 0$$

e utilizando a equação constitutiva da estrutura de junção tem-se

$$P = \vec{v}_e^T \mathbb{J} \vec{v}_e = \vec{v}_s^T \mathbb{J}^T \vec{v}_s = 0$$

desde que todas as ligações estejam entrando para a estrutura de junção, ou todas estejam saindo da estrutura.

## 2.5 - Grafos Multiligação

Para que se tivesse uma forma compacta de representação associada aos elementos multiportas foi criada também uma notação vetorial para as ligações, chamada de **multiligação** (Breedveld, 1982), que engloba todas as variáveis em vetores de potência. Os Grafos Multiligação são uma representação ou notação compacta dos Grafos de Ligação, utilizada quando se trabalha com os campos ou elementos multiportas. Desenvolvidos por Breedveld (1984 e 1985), que definiu a maioria de seus elementos e conceitos, esta extensão da técnica aqui apresentada foi baseada nos conceitos de álgebra linear e pode ser considerada com um "Grafo de Ligação Vetorial". A Figura 2.8 mostra a equivalência entre um campo multiportas representado pelos Grafos de Ligação tradicionais e pelos Grafos Multiligação, juntamente com a definição dos vetores de esforço e fluxo.

$$\begin{array}{c} 3 \downarrow \\ \xrightarrow{2} \mathbb{E} \xleftarrow{n} \\ 1 \uparrow \end{array} \equiv \begin{array}{c} \xrightarrow{\vec{e}} \\ \mathbb{E} \\ \xleftarrow{\vec{f}} \end{array} \quad \vec{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Figura 2.8: Grafos de Ligação x Grafos Multiligação

Recomenda-se que notação multiligação seja adotada sempre que se precisar representar de forma compacta um Grafo de Ligação, mesmo que este não contenha campos multiportas, como os anteriormente definidos. Observa-se que para um sistema de uma certa complexidade o grafo tradicional pode ser extremamente complicado, com um emaranhado de ligações se cruzando. Esta notação vetorial é mais "limpa". A tabela 2.4 mostra os principais elementos multiportas segundo a notação multiligação.

Campo- $\mathbb{C}$	$\Rightarrow \mathbb{C}$
Campo- $\mathbb{I}$	$\Rightarrow \mathbb{I}$
Campo- $\mathbb{R}$	$\Rightarrow \mathbb{R}$
Junções Vetoriais	$\begin{array}{c} \Rightarrow \uparrow \mathbb{1} \leftarrow \\ \Rightarrow \underline{0} \leftarrow \\ \Downarrow \end{array}$
Multitransformador	$\Rightarrow \overset{N}{TF} \Rightarrow$
Multigirador	$\Rightarrow \overset{N}{GY} \Rightarrow$
Estrutura de Junção	$\Rightarrow J \Rightarrow$

Tabela 2.4: Elementos Multiligação

A junção vetorial, que pode ser do tipo  $\underline{1}$  ou  $\underline{0}$ , é a generalização multiportas dos elementos de junção, assim como os multitransformadores e os multigiradores são a generalização daqueles elementos de duas portas definidos no

item 2.3. Estes elementos compõem a estrutura de junção, que por sua vez também possui uma representação multiligação. Dependendo do detalhamento que se queira dar ao modelo é utilizada uma ou outra forma de representação.

Deve-se notar que as equações constitutivas que relacionam as variáveis de potência nos elementos de acoplamento multiligação - multitransformadores (TF) e multigiradores (GY) - são matriciais, e isto acarreta em um certo cuidado na definição destas equações, principalmente no que diz respeito àquela associada às variáveis de retorno.

Considere o multitransformador com a causalidade mostrada na Figura 2.9. Neste caso, adotando a convenção de que o multitransformador (ou o multigirador) tem o seu módulo -matriz N- definido segundo o sentido de potência positivo -entrando para o elemento-, de acordo com a causalidade, a relação entre as variáveis de entrada e de saída -os fluxos-, é dada por

$$\vec{f}_2 = N \vec{f}_1$$



Figura 2.9: Elemento Multitransformador

Pela conservação de potência tem-se

$$\vec{e}_1^T \vec{f}_1 = \vec{e}_2^T \vec{f}_2$$

onde substituindo a equação constitutiva obtém-se

$$\vec{e}_1^T \vec{f}_1 = \vec{e}_2^T N \vec{f}_1$$

Eliminando  $f_1$  da expressão acima e rearrumando os termos segundo a causalidade tem-se

$$\vec{e}_1 = N^T \vec{e}_2$$

e as equações constitutivas deste elemento, para a causalidade da Figura 2.9, são dadas por

$$\begin{cases} \vec{f}_2 = N \vec{f}_1 \\ \vec{e}_1 = N^T \vec{e}_2 \end{cases}$$

O mesmo cuidado deve ser tomado no caso dos multigiradores. O módulo matricial nestes elementos também deve ser definido na equação de retorno, segundo a causalidade, como o transposto do módulo da equação de entrada.

Quanto a atribuição de causalidade aos elementos multiligação também deve-se ter um certo cuidado. Não se define, como no caso dos elementos de ligações simples, um procedimento de atribuição sequencial de causalidade (SCAP) para os Grafos Multiligação. Apesar dos elementos generalizados isolados admitirem as mesmas causalidades dos elementos simples, deve-se observar que para os campos existe a possibilidade da causalidade mista, o que não ocorria anteriormente. Assim normalmente define-se a causalidade dos campos através de considerações físicas, antes de se estabelecer a causalidade do modelo completo, e só após propaga-se estas atribuições causais ao Grafo Multiligação, verificando se existem conflitos. Caso ocorram conflitos deve-se investigar a causalidade previamente atribuída àqueles campos, com base nos conceitos de causalidade dos sistemas com ligações simples.

Como geralmente os Grafos Multiligação caracterizam uma forma compacta de representação dos Grafos de Ligação, a causalidade de cada um de seus elementos pode ser analisada isoladamente antes do sistema completo ser representado, e os erros ou conflitos de causalidade raramente ocorrem.

Existem ainda outros elementos especiais, cuja definição é feita com base nas multiligações, como o **giristor** (Breedveld, 1985), que na verdade é uma estrutura de junção específica, que ocorre em sistemas mecânicos com movimento de corpo rígido no espaço. Este elemento engloba simultaneamente características de um girador e de um resistor (daí o seu nome), porém não dissipando energia! Sua representação normalmente é dada por EJS (estrutura de junção euleriana) tendo a seguinte equação constitutiva (não linear!)

$$\dot{e} = H(J, \dot{f}) \dot{f}$$

onde H é uma matriz anti-simétrica e J caracteriza as propriedades inerciais do corpo rígido.

## 2.6 - Estrutura de um Grafo de Ligação

Todo Grafo de Ligação, eliminadas as variáveis internas (Rosenberg, 1971 e Pedroza e Speranza Neto, 1991), pode ser representado esquematicamente como na Figura 2.10, onde são mostrados os campos característicos armazenador independente (que reúne os elementos capacitores e inércias com causalidade integral) e armazenador dependente (reunião dos elementos armazenadores com causalidade diferencial), os campos dissipador e de fontes e a estrutura de junção, assim como os vetores<sup>1</sup> associados às suas principais variáveis.

1 A partir deste item, para simplificar a notação, não se utilizará mais neste texto a seta (  $\rightarrow$  ) sobre a variável para indicar ser esta um vetor. Como todas as variáveis empregadas no decorrer deste trabalho serão vetoriais, esta simplificação não implicará em dúvida ou na interpretação errada do que for descrito.

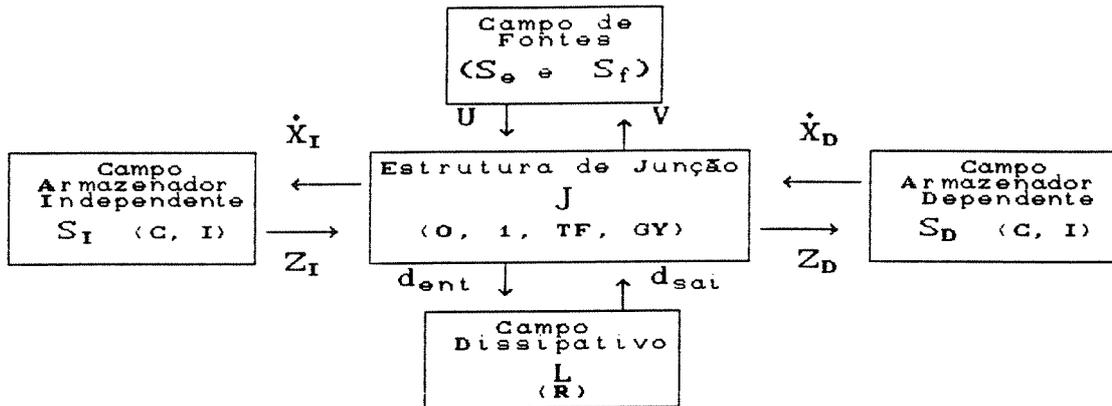


Figura 2.10: Representação esquemática de um Grafo de Ligação

Conforme já mencionado a estrutura de junção é conservadora de potência. Isto é, toda potência que entra na estrutura é restituída, sem que haja dissipação ou armazenamento. Além desta propriedade, explorada com maiores detalhes adiante, a hipótese do modelo ser linear, leva a existência de uma relação linear entre as variáveis de potência que entram na estrutura de junção com as que saem, conforme mostrado na equação abaixo, chamada de matriz estrutura de junção,

$$\begin{Bmatrix} V \\ \dot{X}_I \\ Z_D \\ d_{ent} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{UU} & J_{UI} & J_{UD} & J_{UL} \\ J_{IU} & J_{II} & J_{ID} & J_{IL} \\ J_{DU} & J_{DI} & J_{DD} & J_{DL} \\ J_{LU} & J_{LI} & J_{LD} & J_{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ Z_I \\ \dot{X}_D \\ d_{sai} \end{Bmatrix}$$

onde

$U$  é o vetor de entradas,

$V$  é o vetor complementar de potência na entrada,

$X_I$  é o vetor de energia do campo armazenador independente,

$Z_I$  é o vetor de co-energia do campo armazenador independente,

$X_D$  é o vetor de energia do campo armazenador dependente,

$Z_D$  é o vetor de co-energia do campo armazenador dependente,  $d_{sai}$  é o vetor de saída do campo dissipador, e  $d_{ent}$  é o vetor de entrada para o campo dissipador, e  $J_{ij}$  são sub-matrizes que relacionam estas variáveis.

Esta matriz é obtida através de um procedimento baseado nas equações fundamentais dos Grafos de Ligação, e a sua determinação é o ponto de partida para a metodologia de obtenção automática de modelos dinâmicos, uma vez conhecidas as matrizes constitutivas ( $S_I$ ,  $S_D$  e  $L$ ) que definem a relação entre as variáveis de entrada e saída nos campos característicos, de tal modo que para campo armazenador independente escreve-se

$$Z_I = S_I X_I$$

para o campo armazenador dependente tem-se

$$X_D = S_D^{-1} Z_D$$

e finalmente para o campo dissipador define-se

$$d_{sai} = L d_{ent}$$

Estas matrizes apresentam propriedades interessantes, tratadas e demonstradas em Rosenberg (1971), Ort e Martens (1973), Perelson (1975) e Rosenberg e Karnopp (1983). Como algumas destas propriedades serão utilizadas no desenvolvimento do trabalho aqui proposto, elas são listadas a seguir, comentando-se brevemente sobre o interesse de cada uma.

A estrutura de junção pode ser representada genericamente como mostrado na Figura 2.11, onde  $(e_J, f_J)$  é uma ligação vetorial ou uma multiligação chamada de junção causal, devido a barra causal, indicativa da causalidade, estar no sentido da estrutura de junção, e  $(e_E, f_E)$  é uma ligação vetorial, ou multiligação, elemento causal, devido ao sentido da barra causal estar para fora da estrutura de junção.

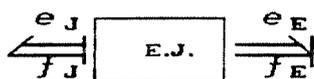


Figura 2.11: Estrutura de Junção Genérica

O modelo linear deste elemento é dado por

$$\begin{bmatrix} e_E \\ f_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_E \\ e_J \end{bmatrix}$$

e pela propriedade de conservação de potência da estrutura de junção tem-se que

$$e_J^T f_J + e_E^T f_E = 0$$

assim, a partir destas duas expressões obtém-se

$$J_{11} = J_{22} = 0$$

$$J_{12} = -J_{21}^T$$

logo

$$\begin{bmatrix} e_E \\ f_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -J_{21}^T \\ J_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_E \\ e_J \end{bmatrix}$$

o que mostra que a matriz estrututur de junção é anti-simétrica, sempre.

Observa-se que são definidos três tipos de estruturas de junção: 1) Estrutura de Junção simples, composta apenas por junções 0 e 1; 2) Estrutura de Junção com peso, composta de junções 0 e 1 e transformadores; 3) Estrutura de Junção geral, compostas por junções 1 e 0, transformadores e giradores; e nos três casos a anti-simetria é verificada, independentemente da complexidade do sistema envolvido, ou dos possíveis acoplamentos entre variáveis que possam ocorrer, mesmo quando estão presentes elementos giradores (Rosenberg e Karnopp, 1983)

Deve-se lembrar que em sistemas mecânicos a estrutura de junção representa as restrições de equilíbrio e compatibilidade cinemática, duais uma da outra, e desacopladas. Este fato físico é indicado pela anti-simetria da matriz que descreve matematicamente estas condições, onde esforços dependem de esforços e fluxos dependem de fluxos, desde que não existam efeitos giroscópicos e que os modelos desenvolvidos sejam lineares.

Em sistemas mecânicos existem duas espécies de não linearidades: a constitutiva, associada ao elemento propriamente dito (C, I, R), ou a geométrica, associada aos vínculos entre os elementos, aqui representados pela estrutura de junção. Apesar das leis de equilíbrio (junções 1) e de compatibilidade (junções 0) serem sempre lineares (são simplesmente somatórios), os elementos transformadores (mudança de referenciais, projeções) e giradores (efeito giroscópico), componentes da estrutura de junção, trazem a informação das não linearidades dos modelos mecânicos.

Nota-se finalmente que o exposto acima ocorre também em sistemas elétricos para as leis das malhas e dos nós; em sistemas fluidos para as leis de compatibilidade de pressões e de continuidade; e em sistemas térmicos para a compatibilidade de temperaturas e de continuidade de fluxos de calor.

Para a forma mais detalhada da estrutura de junção mostrada na Figura 2.10, adaptada de modo que a potência esteja saindo, ou definindo  $V$  como  $-V$  (Rosenberg, 1971), a descrição matemática é

$$\begin{Bmatrix} -V \\ \dot{X}_I \\ Z_D \\ d_{ent} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_{UU} & -J_{UI} & -J_{UD} & -J_{UL} \\ J_{IU} & J_{II} & J_{ID} & J_{IL} \\ J_{DU} & J_{DI} & J_{DD} & J_{DL} \\ J_{LU} & J_{LI} & J_{LD} & J_{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ Z_I \\ \dot{X}_D \\ d_{sai} \end{Bmatrix}$$

e devido a propriedade de anti-simetria tem-se que

- \*  $J_{II}$  é anti-simétrica
- \*  $J_{LL}$  é anti-simétrica
- \*  $-J_{UU}$  é anti-simétrica
- \*  $J_{ID}$  e  $J_{DI}$  são uma a transposta negativa da outra
- \*  $J_{IL}$  e  $J_{LI}$  são uma a transposta negativa da outra
- \*  $J_{IU}$  e  $-J_{UI}$  são uma a transposta negativa da outra
- \*  $J_{DU}$  e  $-J_{UD}$  são uma a transposta negativa da outra
- \*  $J_{LU}$  e  $-J_{UL}$  são uma a transposta negativa de outra

Observa-se que para modelos bem propostos, quando aplicado o procedimento de atribuição sequencial de causalidade (Rosenberg e Karnopp, 1983) tem-se sempre

$$J_{DD} = 0 \quad \text{e} \quad J_{DL} = -J_{LD}^T = 0$$

Procurando detalhar ainda mais a estrutura de junção a Figura 2.12 apresenta um esquema onde todos os campos e vetores característicos e as ligações vetoriais (ou multiligação) associadas são representados.

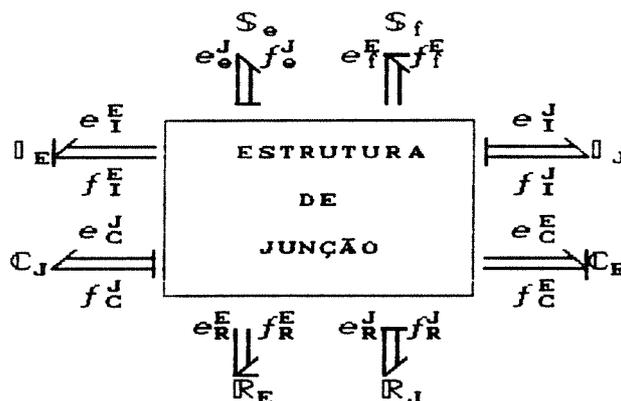


Figura 2.12: Estrutura de Junção detalhada

Assim pode-se relacionar as variáveis da Figura 2.10 com as da Figura 2.12, onde

$$\begin{aligned}
 -v &= -\begin{bmatrix} e_f^E \\ f_o^J \end{bmatrix} \quad e \quad U = \begin{bmatrix} f_f^E \\ e_o^J \end{bmatrix} \\
 \dot{X}_I &= \begin{bmatrix} e_I^E \\ f_C^J \end{bmatrix} \quad e \quad Z_I = \begin{bmatrix} f_I^E \\ e_C^J \end{bmatrix} \quad \text{com } X_I = \begin{bmatrix} p_I^E \\ q_C^J \end{bmatrix} \\
 Z_D &= \begin{bmatrix} e_C^E \\ f_I^J \end{bmatrix} \quad e \quad \dot{X}_D = \begin{bmatrix} f_C^E \\ e_I^J \end{bmatrix} \quad \text{com } X_D = \begin{bmatrix} q_C^E \\ p_I^J \end{bmatrix} \\
 d_{ent} &= \begin{bmatrix} e_R^E \\ f_R^J \end{bmatrix} \quad e \quad d_{sai} = \begin{bmatrix} f_R^E \\ e_R^J \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

e o modelo matemático da estrutura de junção, segundo estas variáveis, já incluindo as propriedades anteriormente mencionadas, desde que não existam elementos giradores, é dado por

$$\begin{bmatrix} -\begin{bmatrix} e_f^E \\ f_o^J \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} e_I^E \\ f_C^J \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} e_C^E \\ f_I^J \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} e_R^E \\ f_R^J \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -N_U^T \\ N_U & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} J_{IU} \\ J_{DU} \\ J_{LU} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} J_{IU} \\ J_{DU} \\ J_{LU} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} J_{IU} \\ J_{DU} \\ J_{LU} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -J_{IU}^T \\ 0 \\ -J_{ID}^T \\ -J_{IL}^T \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -N_I^T \\ N_I & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -J_{ID}^T \\ -J_{IL}^T \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -N_I^T \\ N_I & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -J_{DU}^T \\ J_{ID} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -J_{DU}^T \\ J_{ID} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -J_{DU}^T \\ J_{ID} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -J_{DU}^T \\ J_{ID} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -J_{LU}^T \\ J_{IL} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -J_{LU}^T \\ J_{IL} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -J_{LU}^T \\ J_{IL} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -J_{LU}^T \\ J_{IL} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} f_f^E \\ e_o^J \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} f_I^E \\ e_C^J \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} f_C^E \\ e_I^J \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} f_R^E \\ e_R^J \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Este modelo detalhado da estrutura de junção será utilizado para obter informações sobre o sistema dinâmico, independentemente da manipulação matemática que leva ao modelo de estado. Assim, a partir de um procedimento automático onde esta matriz é montada (Pedroza e Speranza Neto, 1991 e 1992) pode-se interpretar e analisar o sistema, em vários aspectos e visando várias propriedades, sem que o modelo de estado seja necessariamente desenvolvido. Observa-se, por exemplo, que outros termos (ou sub-matrizes) da matriz estrutura de junção

poderão ser nulos, além dos já tratados anteriormente, ou de fácil interpretação em certos casos particulares.

Note que a primeira "linha" da matriz acima, que fornece o vetor complementar de potência na entrada (V), deve ser utilizada quando se deseja conhecer os esforços associados às fontes de fluxo e os fluxos associados às fontes de esforços. Em sistemas mecânicos isto é interessante quando se precisa determinar a força transmitida ao solo em sistemas com excitação de base ou as reações de apoio quando se tem deslocamentos restritos. Em sistemas elétricos a corrente de retorno em fontes de tensão ou a tensão associada a uma fonte de corrente também são informações de interesse. Uma outra utilização desta primeira linha está associada às variáveis de saída do modelo de estado (Sueur e Dauphin-Tanguy, 1989), que podem ser estabelecidas através do emprego de elementos detetores (Suda e Hatanaka, 1985), não representados na Figura 2.12.

Para os campos característicos armazenador independente e dependente e dissipador pode-se escrever as relações constitutivas em função das variáveis associadas à estrutura de junção na forma da Figura 2.12. Deste modo tem-se para o campo armazenador independente

$$Z_I = S_I X_I$$

ou

$$\begin{bmatrix} f_I^E \\ e_C^J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_E^{-1} & 0 \\ 0 & C_J^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_I^E \\ q_C^J \end{bmatrix}$$

para o campo armazenador dependente

$$X_D = S_D^{-1} Z_D$$

ou

$$\begin{bmatrix} q_C^E \\ p_I^J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_E & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_C^E \\ f_I^J \end{bmatrix}$$

e para o campo dissipador

$$d_{\text{saí}} = L d_{\text{ent}}$$

ou

$$\begin{bmatrix} f_R^E \\ e_R^J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_E^{-1} & 0] \\ 0 & [R_J] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_R^E \\ f_R^J \end{bmatrix}$$

As matrizes  $[K_E]$ ,  $[C_J]$ ,  $[K_J]$ ,  $[C_E]$ ,  $[R_E]$  e  $[R_J]$  estão associadas à elementos puros concentrados e/ou à campos explícitos (Karnopp et al., 1990). Em sistemas mecânicos estas matrizes são representativas de propriedades locais dos elementos. A técnica dos Grafos de Ligação permite tratar de propriedades globais quando se trabalha com os chamados campos implícitos, que dependem de uma manipulação do modelo original, conforme será visto no Capítulo 5.

As matrizes  $[K_E]$ ,  $[C_J]$ ,  $[K_J]$  e  $[C_E]$ , associadas aos campos armazenadores independentes e dependentes, respectivamente, são simétricas, pela propriedade de reciprocidade de Maxwell (Rosenberg e Karnopp, 1983), uma vez que estes são conservativos; são matrizes normalmente em banda quando representam campos explícitos;  $[K_E]$  e  $[K_J]$  sempre serão positivas definidas, e  $[C_J]$  e  $[C_E]$  não necessariamente, pois esta propriedade irá depender das restrições impostas ao modelo; todas serão matrizes diagonais, e positivas definidas se representarem elementos concentrados.

No desenvolvimento de campos implícitos, a propriedade de simetria é mantida, porém nada se pode afirmar sobre a topologia das matrizes características, sabe-se apenas que estas serão matrizes banda, e provavelmente esparsas, dependendo do modelo que se esteja tratando. Quanto à positividade ou não destas matrizes, só o problema em particular irá fornecer uma resposta. Adiante, nos Capítulos 3, 4 e 5, serão analisados exemplos mecânicos onde esta e algumas outras propriedades destas matrizes serão investigadas.

As matrizes  $\mathbb{R}_E$  e  $\mathbb{R}_J$  associadas aos elementos dissipativos concentrados são diagonais, e quando representam campos de dissipação explícitos são matrizes quaisquer, pois dependem do modelo de dissipação adotado, porém são garantidamente positivas definidas (Rosenberg e Karnopp, 1983), uma vez que estes elementos efetivamente dissipam energia! Estas propriedades permanecem válidas para os campos dissipativos implícitos, obtidos pela manipulação do modelo original.