TE055

Estabilidade

Profª Juliana L. M. Iamamura

Estabilidade

Um sistema LIT é considerado estável se as partes reais de todos os seus polos estão no semiplano esquerdo.

Um sistema com função de transferência h(t) é chamado BIBO-estável (Bounded Input – Bounded Output) se, para uma entrada limitada, a saída também for limitada.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

Critério de estabilidade de Routh

- Utilizado para verificar se todos os polos de uma função de transferência estão no semiplano esquerdo.
- Aplicado sobre o denominador da função de transferência, evitando a necessidade de se calcular suas raízes
- Seja a equação característica de um sistema de ordem n:

$$a(s)=a_n(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)$$

Critério de estabilidade de Routh

- Multiplicando-se os fatores, obtemos:

$$a(s)=a_n\left[s^n-\left(\sum_i^n p_i\right)s^{n-1}+\sum(\textit{raízes combinadas duas a duas})s^{n-2}-\right.$$

$$\left.-\sum(\textit{raízes combinadas três a três})s^{n-3}+\ldots+(-1)^n(p_1 p_2\ldots p_n)\right]$$

Critério de estabilidade de Routh

- Multiplicando-se os fatores, obtemos:

$$a(s)=a_n\left[s^n-\left(\sum_i^n p_i\right)s^{n-1}+\sum\ (raízes\ combinadas\ duas\ a\ duas)\,s^{n-2}-\right.$$

$$\left.-\sum\ (raízes\ combinadas\ três\ a\ três)\,s^{n-3}+\ldots+(-1)^n(p_1 p_2 \ldots p_n)\right]$$

- Uma raiz nula implica no termo independente nulo → sistema instável
- A presença de outro termo nulo implica em raízes com sinais opostos → sistema instável

Critério de estabilidade de Routh

- Essas condições são necessárias, mas não suficientes para garantir a estabilidade do sistema.
- O critério de Routh verifica a estabilidade do sistema sem calcular explicitamente as raízes do polinômio $a(s) = a_n (s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_n)$
- Para isso, escreve-se o polinômio acima da seguinte forma:

$$a(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

Critério de estabilidade de Routh

$$a(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

$$\begin{array}{lllll}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \ldots \\
\vdots & & & & \\
s^2 & \# & \# & & \\
s^1 & \# & & & \\
s^0 & \# & & &
\end{array}$$

$\Rightarrow$ Coeficientes do polinômio

Critério de estabilidade de Routh

$$a(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

$$\begin{array}{lllll}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & \boxed{b_1} & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
\vdots & & & & \\
s^2 & \# & \# & & \\
s^1 & \# & & & \\
s^0 & \# & & &
\end{array}$$

$$b_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

Critério de estabilidade de Routh

$$a(s)=a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

$$\begin{array}{lllll}
s^n & \boxed{a_n} & a_{n-2} & \boxed{a_{n-4}} & \ldots \\
s^{n-1} & \boxed{a_{n-1}} & a_{n-3} & \boxed{a_{n-5}} & \ldots \\
s^{n-2} & b_1 & \boxed{b_2} & b_3 & \ldots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \ldots \\
\vdots & & & & \\
s^2 & \# & \# & & \\
s^1 & \# & & & \\
s^0 & \# & & &
\end{array}$$

$$\boxed{b_2 = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}}$$

Critério de estabilidade de Routh

$$a(s)=a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

$$\begin{array}{lllll}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \ldots \\
\vdots & & & & \\
s^2 & \# & \# & & \\
s^1 & \# & & & \\
s^0 & \# & & &
\end{array}$$

$$b_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_3 = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

Critério de estabilidade de Routh

$$a(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

$$\begin{array}{lllll}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \ldots \\
\vdots & & & & \\
s^2 & \# & \# & & \\
s^1 & \# & & & \\
s^0 & \# & & &
\end{array}$$

$$c_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_{n-7} - a_{n-1} b_4}{b_1}$$

Critério de estabilidade de Routh

$$a(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

$$\begin{array}{l|l|llll}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \ldots \\
\vdots & & & & \\
s^2 & \# & \# & & \\
s^1 & \# & & & \\
s^0 & \# & & &
\end{array}$$

O número de raízes no semiplano direito é igual ao número de mudanças de sinal na primeira coluna da tabela.

Critério de estabilidade de Routh

- Seja o polinômio $a(s) = s^6 + 4s^5 + 3s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 4$, cujos coeficientes são todos positivos.

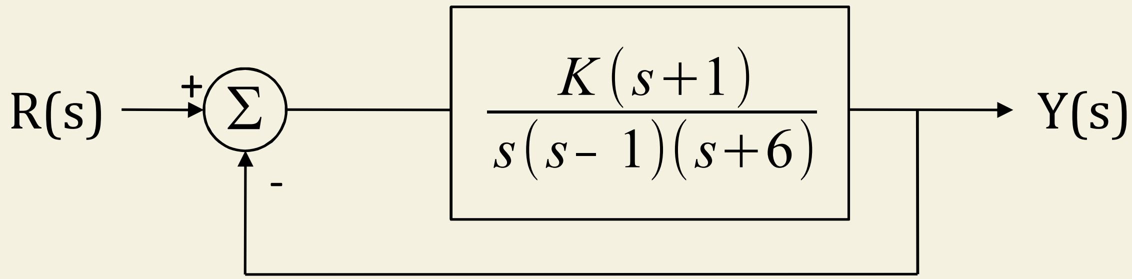
  Verifique se todas as suas raízes estão no SPE.

Critério de estabilidade de Routh

- Coeficiente nulo na 1ª coluna – 3 métodos:
  - Substituir s por 1/x e reescrever o polinômio em função de x. Reconstruir a tabela de Routh.
  - Multiplicar o polinômio por (s+a), com a>0, por exemplo, (s+1).
  - Substituir 0 por ε, sendo que ε possui o mesmo sinal do primeiro termo na linha anterior e tende a zero.

Critério de estabilidade de Routh

- Determine a faixa de ganho K para a qual o sistema abaixo é estável:



Estabilidade relativa

- Deseja-se saber se todos os polos estão à esquerda de $s = -\sigma_1$.
- Para isso, deve-se fazer $s = z - \sigma_1$, substituindo-se os termos da equação característica.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

Equação característica: $1+G(s)=0$