

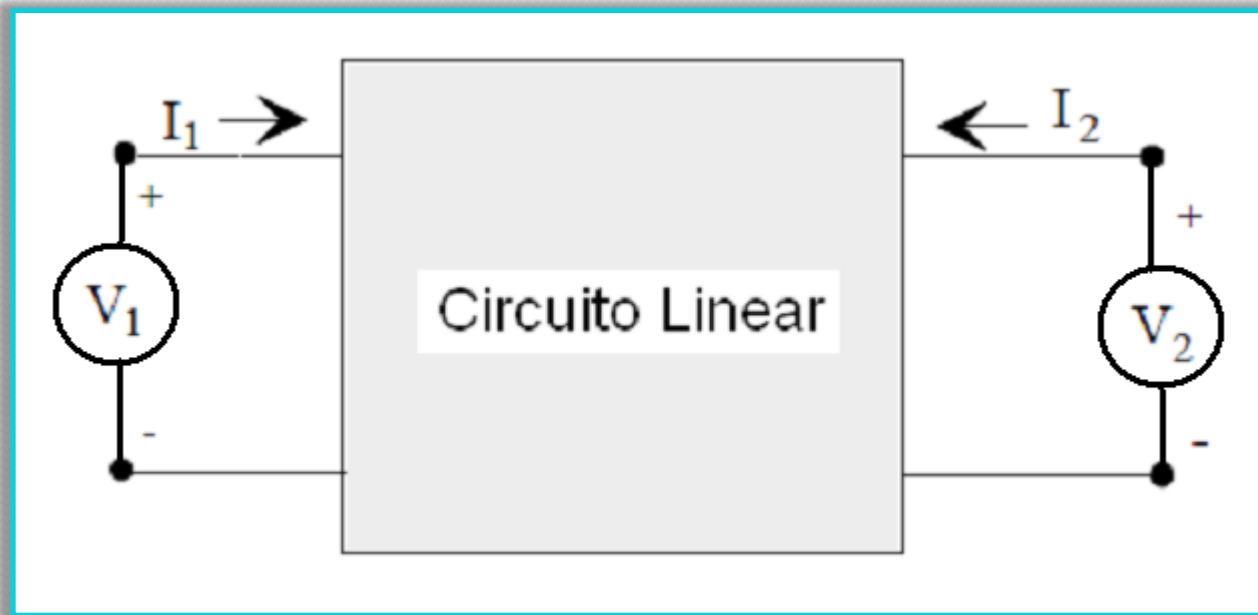
TE045 – Circuitos Eléctricos II

# Quadripólos

# O que são quadripólos?

- Duas portas separadas para entrada e saída;
  - Não há ligações externas.
- Dois pares de terminais funcionando como ponto de acesso;
- Utilização:
  - Sistemas de comunicação, de controle, de potência e na eletrônica geral.

# O que são quadripólos?



**Representação de quadripólo alimentado por fonte de tensão**

# Quadripólos

- Parâmetros de Impedância

$$\begin{aligned}V_1 &= f(I_1, I_2) \\V_2 &= f(I_1, I_2)\end{aligned}$$

- Parâmetros de Admitância

$$\begin{aligned}I_1 &= f(V_1, V_2) \\I_2 &= f(V_1, V_2)\end{aligned}$$

# Quadripólos

- Parâmetros Híbridos

$$\begin{aligned}V_1 &= f(I_1, V_2) \\ I_2 &= f(I_1, V_2)\end{aligned}$$

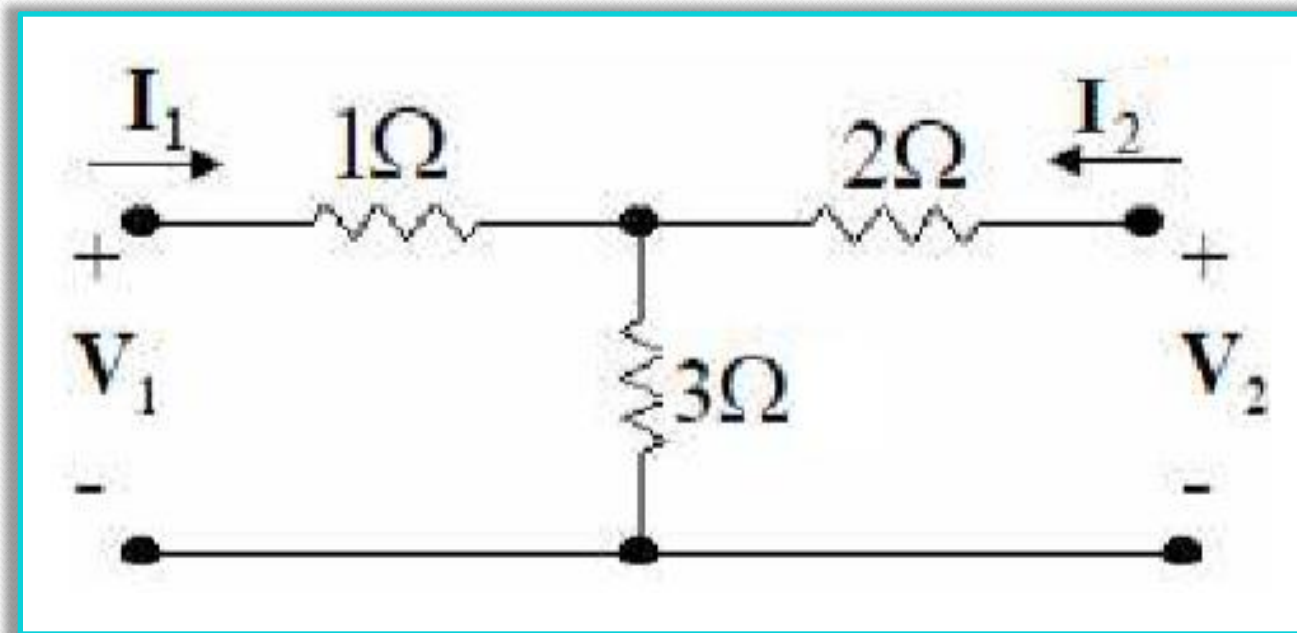
$$\begin{aligned}V_2 &= f(I_2, V_1) \\ I_1 &= f(I_2, V_1)\end{aligned}$$

- Parâmetros de Transmissão

$$\begin{aligned}V_1 &= f(I_2, V_2) \\ I_1 &= f(I_2, V_2)\end{aligned}$$

# Quadripólos

- Parâmetros de Impedância ( $z$ )



# Quadripólos

- Parâmetros de Impedância ( $z$ )

$$V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2$$

$$V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2$$

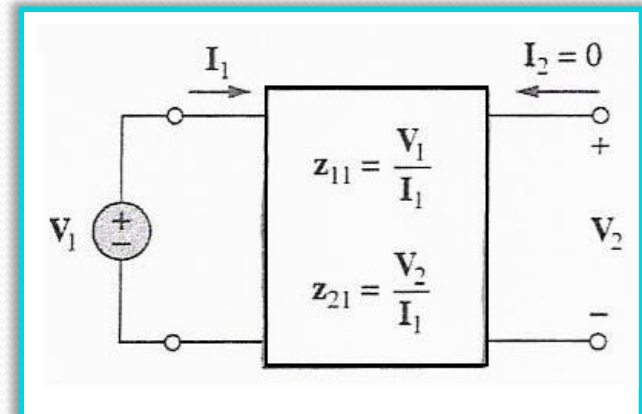
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

- $z_{11}$  = Impedância de entrada com saída em aberto
- $z_{12}$  = Impedância de transferência com entrada em aberto.
- $z_{21}$  = Impedância de transferência com saída em aberto.
- $z_{22}$  = Impedância de saída com entrada em aberto

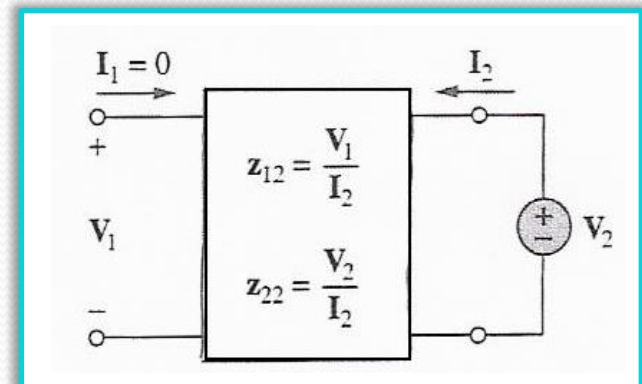
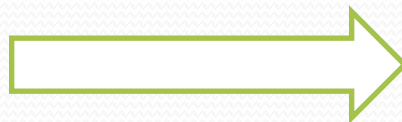
# Quadripólos

- Parâmetros de Impedância (z)

$$z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$$
$$z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$$



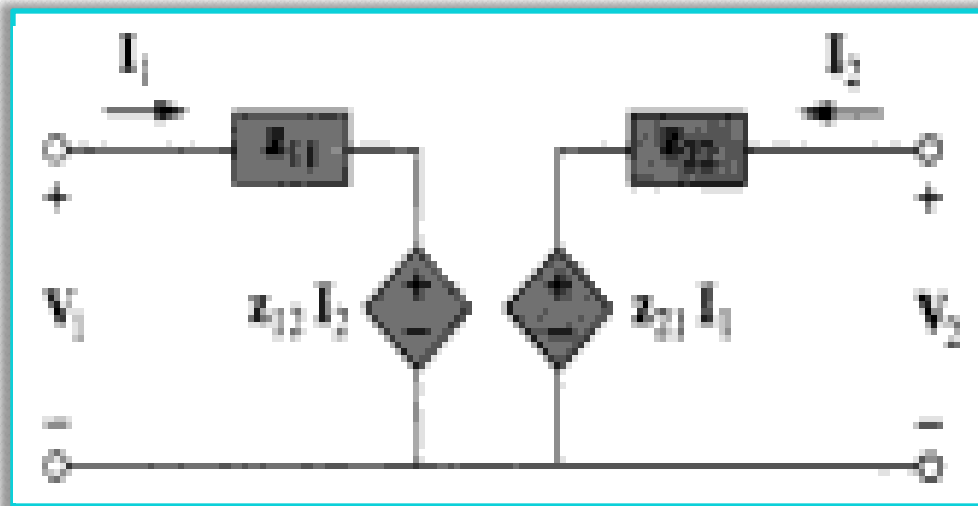
$$z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$$
$$z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$$





# Quadripólos

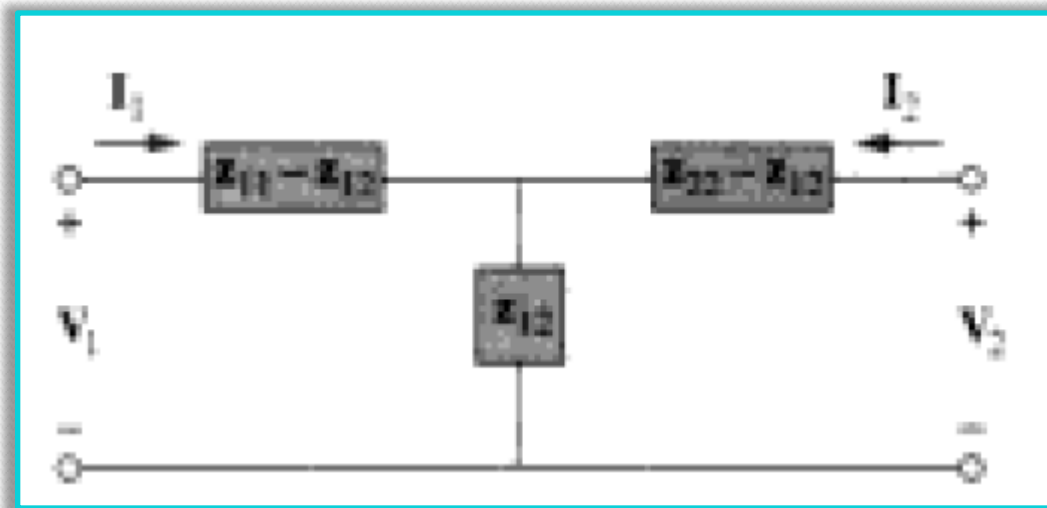
- Parâmetros de Impedância (z)



**Circuito equivalente genérico**

# Quadripólos

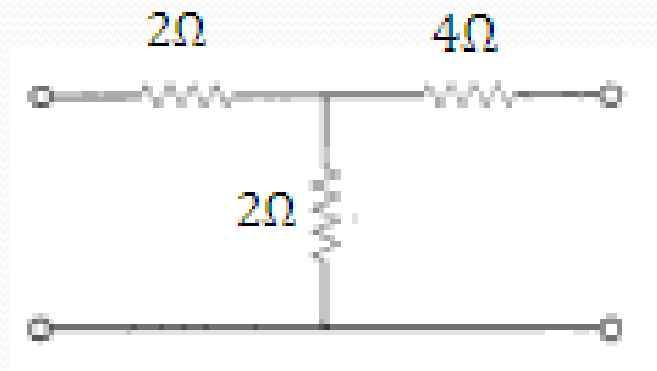
- Parâmetros de Impedância ( $z$ )



**Circuito T equivalente genérico somente para circuitos recíprocos**

# Quadripólos

- Parâmetros de Impedância ( $z$ )
- Exercício



Resposta

$$\begin{aligned} z_{11} &= 4\Omega & z_{21} &= 2\Omega \\ z_{12} &= 2\Omega & z_{22} &= 6\Omega \end{aligned}$$

# Quadripólos

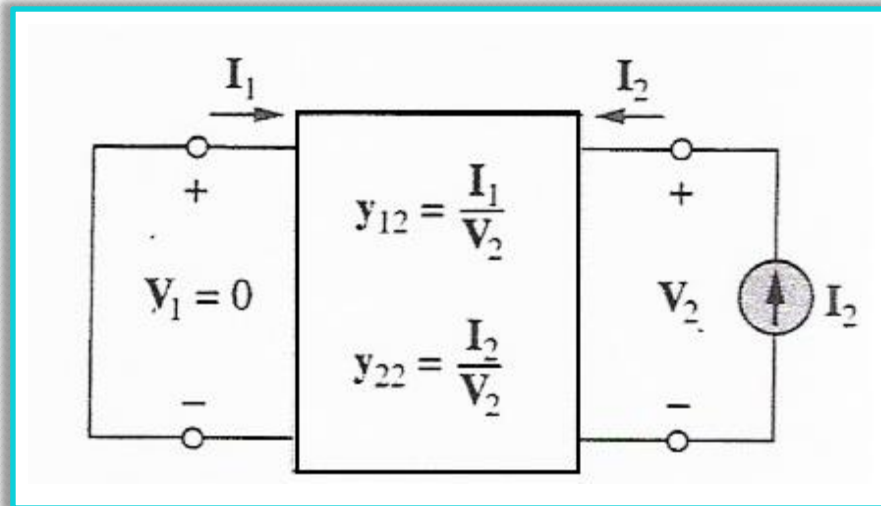
- Parâmetros de Admitância ( $y$ )

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_{11} &= \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} & y_{12} &= \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} \\ y_{21} &= \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} & y_{22} &= \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} \end{aligned}$$

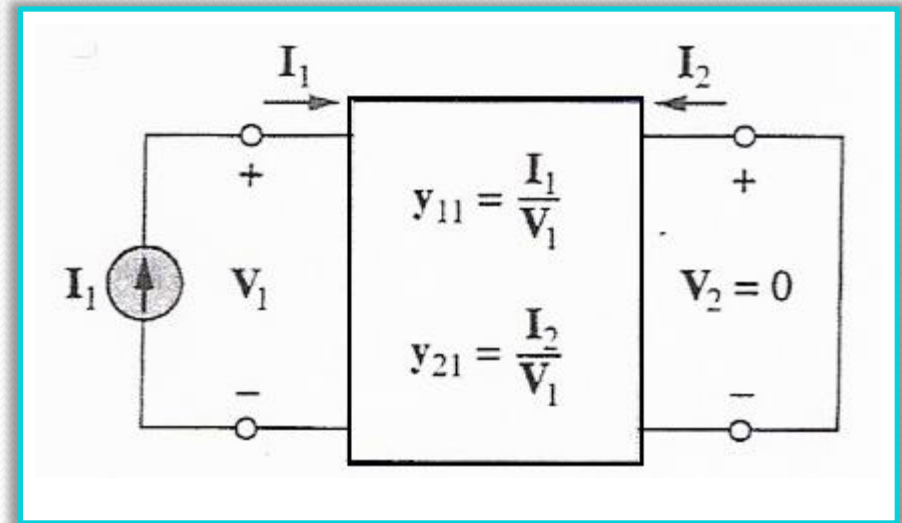
# Quadripólos

- Parâmetros de Admitância ( $y$ )



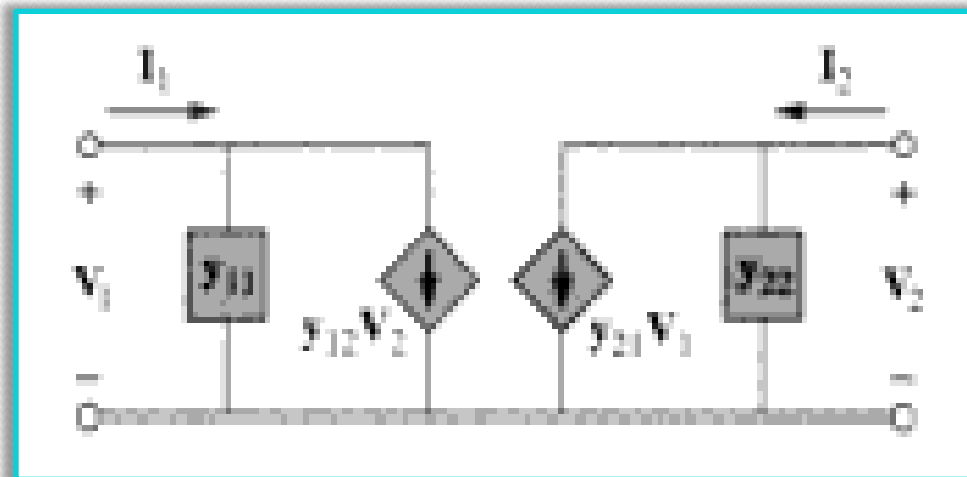
$$V_1 = 0$$

$$V_2 = 0$$



# Quadripólos

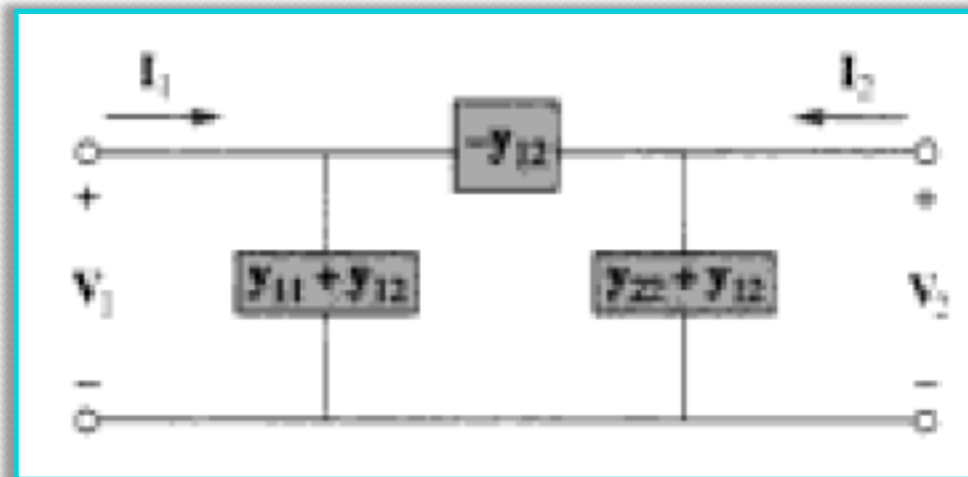
- Parâmetros de Admitância ( $y$ )



**Circuito equivalente genérico**

# Quadripólos

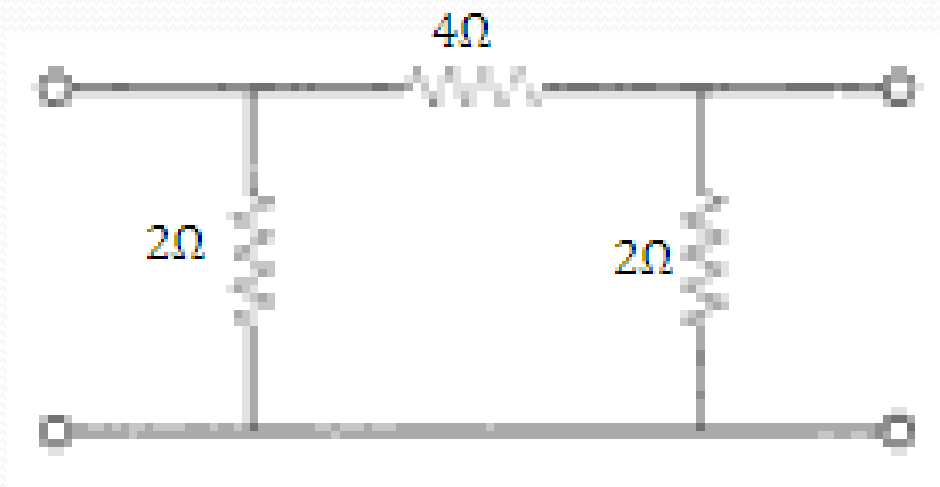
- Parâmetros de Admitância ( $y$ )



**Circuito n equivalente genérico para circuitos recíprocos**

# Quadripólos

- Parâmetros de Admitância ( $y$ )
- Exercício



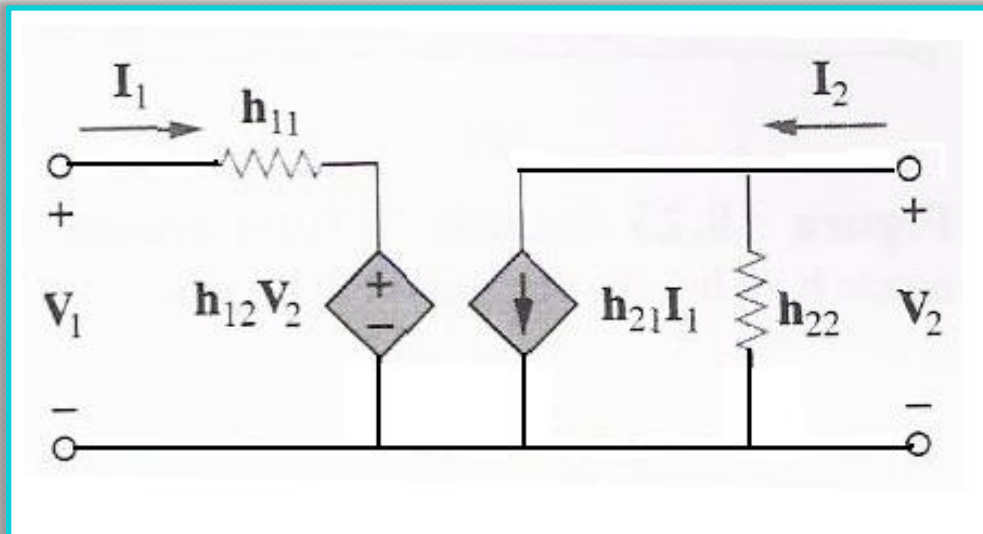
Resposta

$$y_{11} = \frac{3}{4} \text{ S} \quad y_{21} = -\frac{1}{4} \text{ S}$$
$$y_{12} = -\frac{1}{4} \text{ S} \quad y_{22} = \frac{3}{4} \text{ S}$$



# Quadripólos

- Parâmetros de Híbridos (h)



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

**Circuito de parâmetros  $h$  equivalente a um circuito de duas portas**

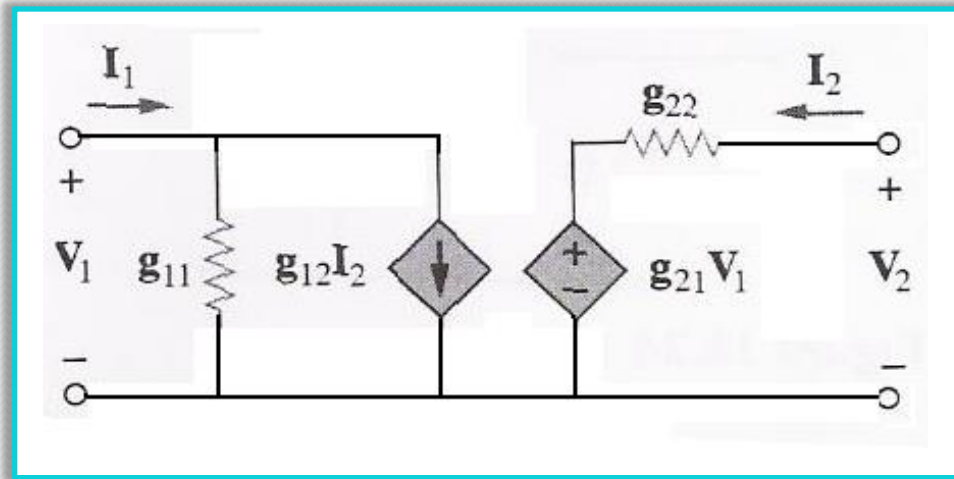
# Quadripólos

- Parâmetros de Híbridos (h)
- $h_{11}$  = Impedância de entrada com saída em curto-circuito
- $h_{12}$  = Ganho de tensão reverso com entrada em aberto.
- $h_{21}$  = Ganho de corrente direto com saída em curto-circuito.
- $h_{22}$  = Admitância de saída com entrada em aberto

$$\begin{aligned} h_{11} &= \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} & h_{12} &= \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0} \\ h_{21} &= \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0} & h_{22} &= \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0} \end{aligned}$$

# Quadripólos

- Parâmetros de Híbridos (g)



$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

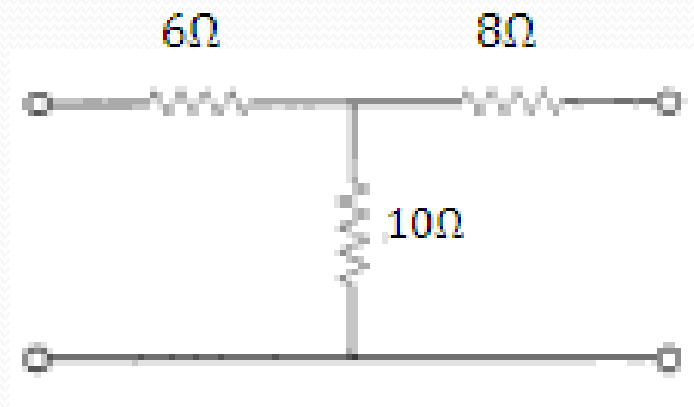
# Quadripólos

- Parâmetros de Híbridos (g)
- $g_{11}$  = Admitância de entrada com saída em aberto
- $g_{12}$  = Ganho de corrente reverso com entrada em curto-circuito
- $g_{21}$  = Ganho de tensão com saída em aberto
- $g_{22}$  = Impedância de saída com entrada em curto-circuito

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{I_2=0} & g_{12} &= \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_1=0} \\ g_{21} &= \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_2=0} & g_{22} &= \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{V_1=0} \end{aligned}$$

# Quadripólos

- Parâmetros de Híbridos (h)
- Exercício

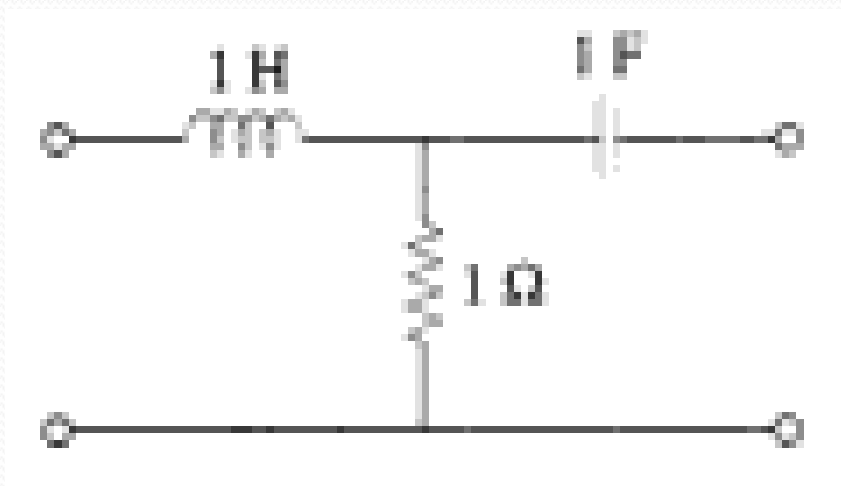


Resposta

$$h_{11} = \frac{94}{9} \Omega \quad h_{21} = -\frac{5}{9}$$
$$h_{12} = \frac{5}{9} \quad h_{22} = \frac{1}{18} S$$

# Quadripólos

- Parâmetros de Híbridos ( $g$ )
- Exercício



Resposta

$$[g] = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s+1} \\ 1 & \frac{s^2 + s + 1}{s(s+1)} \end{bmatrix}$$

# Quadripólos

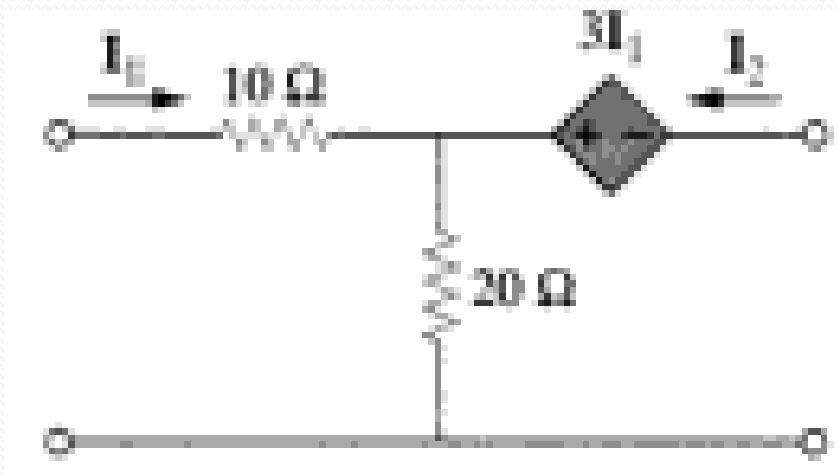
- Parâmetros de Transmissão (T)
- A = Razão de tensão com saída em aberto
- B = Impedância negativa de transmissão com saída em curto-circuito
- C = Admitância de transferência com saída em aberto
- D = Razão de corrente negativa com saída em curto-circuito

$$\mathbf{A} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} \quad \mathbf{B} = - \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$$
$$\mathbf{C} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} \quad \mathbf{D} = - \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{T}] \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

# Quadripólos

- Parâmetros de Transmissão
- Exercício



Resposta

$$A = 1,765$$

$$B = 15,29 \Omega$$

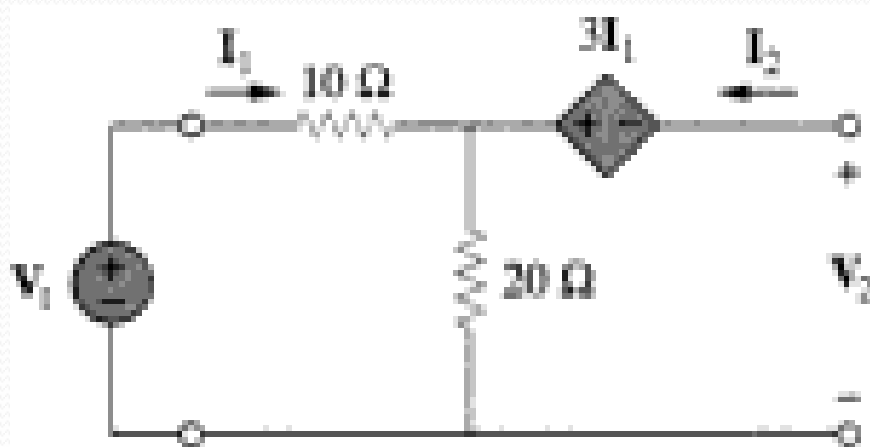
$$C = 0,0588 S$$

$$D = 1,176$$



# Quadripólos

- Para determinar A e C, deixa-se a porta de saída aberta ( $i_2 = 0$ )



$$V_1 = (10 + 20)I_1 = 30I_1$$

$$V_2 = 20I_1 - 3I_1 = 17I_1$$

$$\Rightarrow A = \frac{V_1}{V_2} = \frac{30I_1}{17I_1} = 1,765 \quad C = \frac{I_1}{V_2} = \frac{I_1}{17I_1} = 0,0588 \text{ S}$$

# Quadripólos

- Para obter B e D, “curto-circuita” a porta de saída ( $V_2 = 0$ )

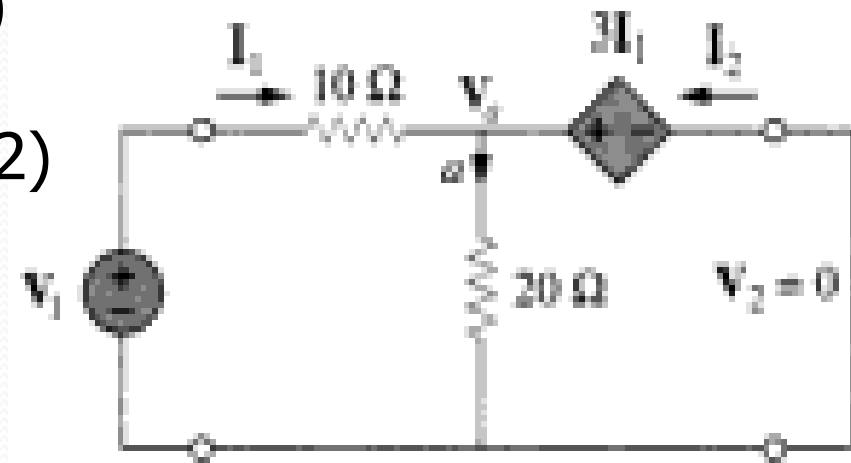
Por LCK  $\frac{V_1 - V_a}{10} + \frac{(-V_a)}{20} + I_2 = 0$  (1)

$V_a = 3I_1$  e  $I_1 = \frac{V_1 - V_a}{10} \Rightarrow V_1 = 13I_1$  (2)

Substituindo (2) em (1)

$$I_1 + \frac{3I_1}{20} + I_2 = 0$$

$$\frac{17}{20} I_1 = -I_2 \Rightarrow D = -\frac{I_1}{I_2} = \frac{20}{17} = 1,176 \quad B = -\frac{V_1}{I_2} = \frac{-13I_1}{\left(-\frac{17}{20}\right) I_1} = 15,29 \Omega$$



# Parâmetros

- Relação entre parâmetros.
- Seis conjuntos de parâmetros relacionam as mesmas variáveis terminais de entrada e saída para os mesmo circuito de duas portas – Inter-relacionados!

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [z] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [z]^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

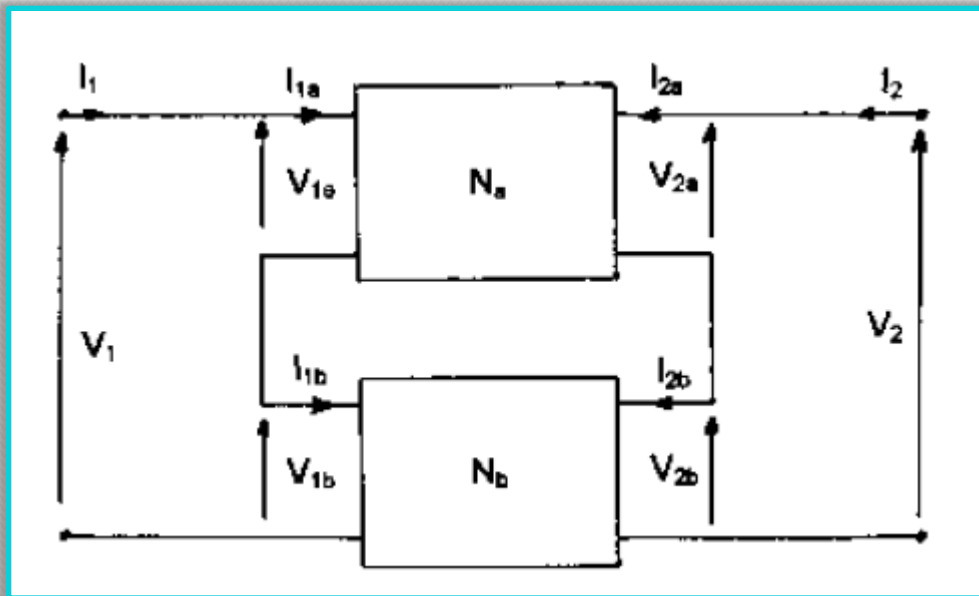
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [y] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Conclui-se:

$$[y] = [z]^{-1}$$

# Associações

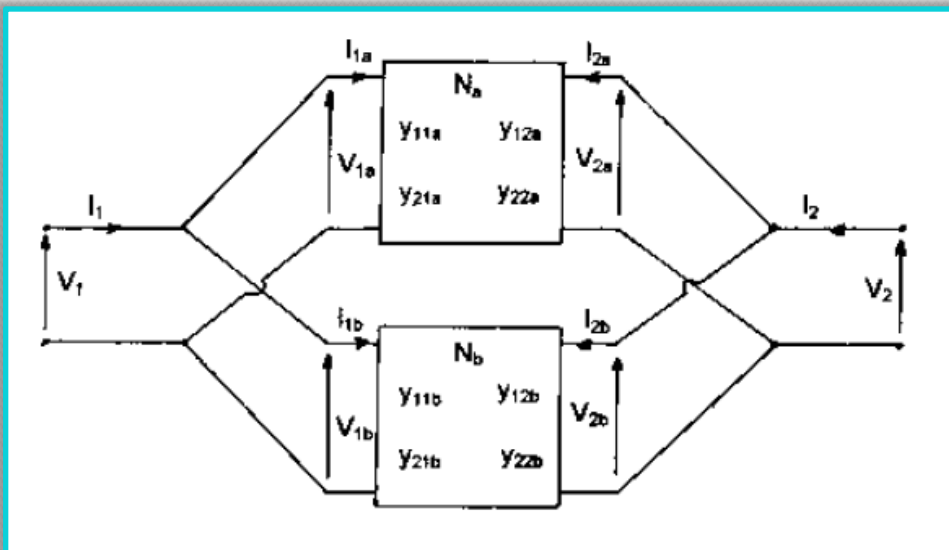
- Série



$$\begin{aligned}[I] &= [I_a] = [I_b] \\ [V] &= [V_a + V_b] \\ [V] &= [Z_a] \cdot [I_a] + [Z_b] \cdot [I_b] \\ [V] &= [Z_a + Z_b] \cdot [I] = [Z] \cdot [I] \\ [Z] &= [Z_a + Z_b]\end{aligned}$$

# Associações

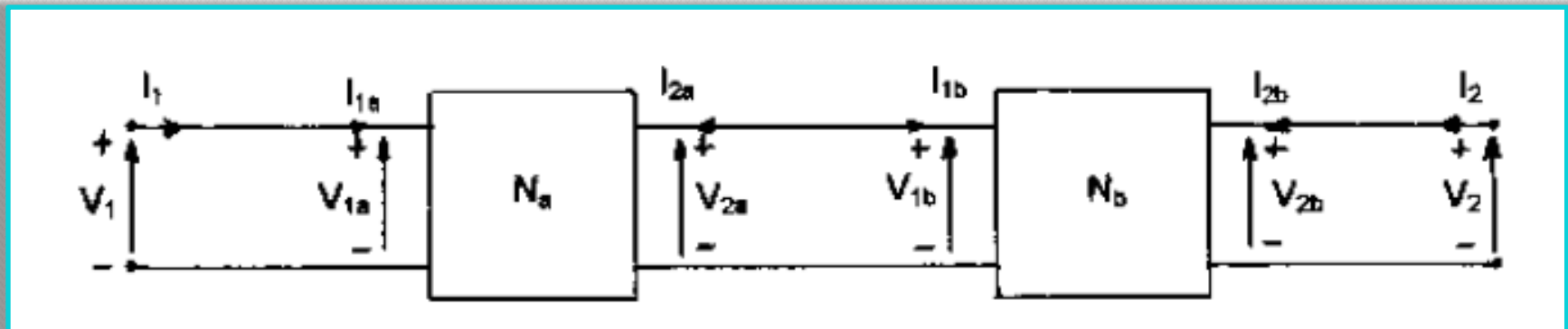
- Paralelo



$$\begin{aligned} [V] &= [V_a] = [V_b] \\ [I] &= [I_a + I_b] \\ [I] &= [Y_a + Y_b] \cdot [V] = [Y] \cdot [V] \\ [Y] &= [Y_a + Y_b] \end{aligned}$$

# Associações

- Cascata



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix} = [T_a] \begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix} = [T_a] \begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix} = [T_a][T_b] \begin{bmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix} = [T_a][T_b] \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$
$$[T] = [T_a][T_b]$$